

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO SUCKOW DA  
FONSECA - CEFET/RJ**

**ANÁLISE DINÂMICA DE UMA ESTRUTURA TENSÍNTegra ATIVA  
ATUADA POR LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA**

João Victor Gonçalves Pandino de Oliveira

Professor Orientador: Fernando Ribeiro da  
Silva.

**Rio de Janeiro  
Janeiro de 2021**

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO SUCKOW DA  
FONSECA - CEFET/RJ**

**ANÁLISE DINÂMICA DE UMA ESTRUTURA TENSÍNTegra ATIVA  
ATUADA POR LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA**

João Victor Gonçalves Pandino de Oliveira

Projeto final apresentado em cumprimento às normas do Departamento de Educação Superior do CEFET/RJ, como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica

Professor Orientador: Fernando Ribeiro da Silva.

**Rio de Janeiro**

**Janeiro de 2021**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central do CEFET/RJ

O48 Oliveira, João Victor Gonçalves Pandino de  
Análise dinâmica de uma estrutura tensíntegra ativa atuada  
por ligas com memória de forma / João Victor Gonçalves Pandino  
de Oliveira – 2021.  
66 f.: il. color., + anexos , enc.

Projeto Final (Graduação) Centro Federal de Educação  
Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, 2021.

Bibliografia : f. 65-66

Orientador: Fernando Ribeiro da Silva

1. Engenharia mecânica. 2. Ligas com memória de forma.  
3. Ligas com memória de forma – Propriedades termomecânicas.  
I. Silva, Fernando Ribeiro da (Orient.). II. Título.

CDD 620.1

## RESUMO

As ligas com memória de forma (LMF) já a algum tempo veem atraindo atenção devido a suas propriedades termomecânicas únicas. Essas características geram grande interesse de pesquisadores e desenvolvedores de novas tecnologias. As LMF estão cada vez mais presentes no desenvolvimento de pesquisas nas áreas: médica, aeroespacial, automotiva, entre outras. O presente trabalho tem por objetivo analisar o comportamento dinâmico de uma estrutura ativa, capaz de variar sua geometria através da ação de carregamentos termomecânicos em ligas com memória de forma. Primeiramente foram feitas as análises do comportamento estático e dinâmico da estrutura mais básica, a estrutura tensíntegra em "X". Esta estrutura é assunto também de outros trabalhos, já que permite, a partir dela, a construção de estruturas maiores e mais complexas. Baseado na análise inicial desse conjunto mais simples, definiu-se o seu estado de pré-tensão e seu modelo numérico para o comportamento dinâmico. Ao final foi estudada a estrutura completa do trabalho, constituída pela combinação das estruturas elementares já conhecidas. Por fim, o trabalho teve um resultado conclusivo quanto à capacidade que algumas estruturas tensíntegras ativas têm em variar seu comportamento a solicitações dinâmicas.

Palavras-chave: Tensegriedade, estruturas ativas, liga com memória de forma, comportamento dinâmico.

## **ABSTRACT**

Shape memory alloys (SMA) have been attracting attention for some time due to their unique thermomechanical properties. These characteristics generate great interest from researchers and developers of new technologies. SMA are increasingly present in the development of research in the areas: medical, aerospace, automotive, among others. The present work aims to analyze the dynamic behavior of an active structure, capable of varying its geometry through the action of thermomechanical loads in alloys with shape memory. Firstly, the analysis of the static and dynamic behavior of the most basic structure, the thymus structure in "X", was made. This structure is also the subject of other works, since it allows, from it, the construction of larger and more complex structures. Based on the initial analysis of this simpler set, its pre-tension state and its numerical model for dynamic behavior were defined.

At the end, the complete structure of the work was studied, constituted by the combination of the elementary structures already known. Finally, the work had a conclusive result as to the capacity that some active tensintegram structures have in varying their behavior to dynamic stresses.

Keywords: Tensegrity, active structures, shape memory alloy, dynamic behavior.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1- EVOLUÇÃO DA FRAÇÃO MARTENSÍTICA EM FUNÇÃO DA TEMPERATURA NA LIGA LMF .....	15
Figura 2 - MOVIMENTO PERIÓDICO DE UM ROLAMENTO DE UMA TURBINA A VAPOR.....	16
Figura 3 – REPRESENTAÇÃO DE CURVAS HARMÔNICAS E NÃO HARMÔNICA NO DOMÍNIO DO TEMPO .....	17
Figura 4 – SISTEMA MASSA-MOLA E SISTEMA PENDULAR.....	17
Figura 5 – PONTE TACOMA NARROWS APÓS RUPTURA DEVIDO À RESSONÂNCIA .....	19
Figura 6 – OS TRÊS PRIMEIROS MODOS DE VIBRAÇÃO PARA UMA CORDA .....	19
Figura 7 - ESTRURA EM "X" .....	21
Figura 8 - PRISMA TRIANGULAR.....	21
Figura 9 - PRIMEIRA MONTAGEM DA ESTRURA EM "X" .....	23
Figura 10 - SEGUNDA MONTAGEM DA ESTRURA EM "X" .....	23
Figura 11 – TERCEIRA MONTAGEM DA ESTRURA EM "X" .....	24
Figura 12 – QUARTA MONTAGEM DA ESTRURA EM "X" .....	24
Figura 13 - MOVIMENTO DA ESTRUTURA EM "X" MOTIVADO POR UMA EXTENSÃO DE 4% NAS LIGAS LMF.....	25
Figura 14 - GEOMETRIA ÓTIMA DA ESTRUTURA EM "X", E A VARIAÇÃO DE COMPRIMENTO DOS SEUS ELEMENTOS DEVIDO À ATIVAÇÃO DAS LIGAS LMF .....	27
Figura 15 – ESTRUTURA TENSÍNTEGRA ESQUEMATIZADA EM ESCALA	28
Figura 16 – IMAGEM ILUSTRATIVA DE UM MODELO EM ESCALA, CRIADO EM SOLIDWORKS, AO SER MONTADO (ESTÁGIO INICIAL) .....	30
Figura 17 – TABELA COM DADOS DA LMF FLEXINOL.....	32
Figura 18 - ESTRUTURA EM "X" ANALISADA .....	34
Figura 19 – SOMATÓRIO DE MOMENTO NA HASTE DA ESTRUTURA "X" ..	35
Figura 20 - ESTRUTURA EM "X" ANALISADA NO ESTUDO DINÂMICO .....	41
Figura 21- OS 5 GRAUS DE LIBERDADE CONSIDERADOS NO CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA EM "X" .....	42
Figura 22 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS À	

ESTRUTURA EM "X" ANALISADA, PARA O PRIMEIRO GRAU DE LIBERDADE ..	43
Figura 23 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS À	
ESTRUTURA EM "X" ANALISADA, PARA O SEGUNDO GRAU DE LIBERDADE ..	43
Figura 24 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS À	
ESTRUTURA EM "X" ANALISADA, PARA O TERCEIRO GRAU DE LIBERDADE ..	44
Figura 25 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS À	
ESTRUTURA EM "X" ANALISADA, PARA O QUARTO GRAU DE LIBERDADE .....	44
Figura 26 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS À	
ESTRUTURA EM "X" ANALISADA, PARA O QUINTO GRAU DE LIBERDADE .....	45
Figura 27 - OS 5 GRAUS DE LIBERDADE CONSIDERADOS NO CÁLCULO	
DA MATRIZ DE MASSA DA ESTRUTURA EM "X" .....	47
Figura 28 - MÉTODO APLICADO NO CÁLCULO DA MATRIZ DE MASSA DA	
ESTRUTURA EM "X", PARA O PRIMEIRO GRAU DE LIBERDADE.....	47
Figura 29 - MÉTODO APLICADO NO CÁLCULO DA MATRIZ DE MASSA DA	
ESTRUTURA EM "X", PARA O SEGUNDO GRAU DE LIBERDADE .....	48
Figura 30 - MÉTODO APLICADO NO CÁLCULO DA MATRIZ DE MASSA DA	
ESTRUTURA EM "X", PARA O TERCEIRO GRAU DE LIBERDADE.....	48
Figura 31 - MÉTODO APLICADO NO CÁLCULO DA MATRIZ DE MASSA DA	
ESTRUTURA EM "X", PARA O QUARTO GRAU DE LIBERDADE .....	49
Figura 32 - MÉTODO APLICADO NO CÁLCULO DA MATRIZ DE MASSA DA	
ESTRUTURA EM "X", PARA O QUARTO GRAU DE LIBERDADE .....	49
Figura 33 – CONDIÇÕES DE CONTORNO DA ESTRUTURA EM "X" – ANSYS	
APDL.....	54
Figura 34 – GEOMETRIA DA ESTRUTURA EM "X" – ANSYS APDL.....	55
Figura 35 – IMAGEM DO 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA NO	
ESTÁGIO INICIAL (FREQUÊNCIA NATURAL 2,79 HZ).....	59
Figura 36 – IMAGEM DO 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA NO	
ESTÁGIO INICIAL (FREQUÊNCIA NATURAL 3,18 HZ).....	59
Figura 37 – IMAGEM DO 3º MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA NO	
ESTÁGIO INICIAL (FREQUÊNCIA NATURAL 4,53 HZ).....	60
Figura 38 – IMAGEM DO 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA NO	
ESTÁGIO FINAL (FREQUÊNCIA NATURAL 2,50 HZ) .....	60
Figura 39 – IMAGEM DO 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA NO	
ESTÁGIO FINAL (FREQUÊNCIA NATURAL 2,71 HZ) .....	61

Figura 40 – IMAGEM DO 3º MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA NO ESTÁGIO FINAL (FREQUÊNCIA NATURAL 3,70 HZ) .....61

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - INFORMAÇÕES DIMENSIONAIS E GEOMETRICA DA ESTRUTURA NO ESTÁGIO INICIAL.....	29
Tabela 2 - INFORMAÇÕES DIMENSIONAIS E GEOMETRICA DA ESTRUTURA NO ESTÁGIO FINAL .....	29
Tabela 3 – TRÊS PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS PELO MODELO NUMÉRICO DOS DOIS FORMATOS DA ESTRUTURA “X” .....	51
Tabela 4 – PROPRIEDADES FÍSICAS RELEVANTES DOS ELEMENTOS DA ESTRUTURA .....	52
Tabela 5 – PROPRIEDADES MECÂNICAS RELEVANTES DOS ELEMENTOS DA ESTRUTURA .....	53
Tabela 6 – TRÊS PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS PELO ANSYS DOS DOIS FORMATOS DA ESTRUTURA “X” .....	56
Tabela 7 - RESULTADOS DAS ANÁLISES DINÂMICAS DA ESTRUTURA “X” NO ESTÁGIO INICIAL .....	57
Tabela 8 - RESULTADOS DAS ANÁLISES DINÂMICAS DA ESTRUTURA “X” NO ESTÁGIO FINAL.....	57
Tabela 9 – TRÊS PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS DO ANSYS PARA OS DOIS FORMATOS DA ESTRUTURA DO TRABALHO .....	62

## LISTA DE SIGLAS E ACRÔNIMOS

$A$  - Área  
 $A_{ch}$  - Área da seção transversal dos cabos horizontais  
 $A_f$  - Final da fase austenítica  
 $A_s$  - Início da fase austenítica  
D.C.L - Diagrama de corpo livre  
 $E$  - Módulo de elasticidade  
 $E_{ch}$  - Módulo de elasticidade dos cabos horizontais  
 $F$  - Vetor força  
 $F_M$  - Força na mola  
 $F_{cv}$  - Força dos cabos verticais  
 $F_{ch}$  - Força dos cabos horizontais  
 $K$  - Constante elástica  
 $K_{cv}$  - Constante elástica dos cabos verticais  
 $K_{ch}$  - Constante elástica dos cabos horizontais  
 $K_M$  - Constante elástica da mola  
 $L$  - Comprimento  
 $L_{ch}$  - Comprimento dos cabos horizontais  
 $L_{cv}$  - Comprimento dos cabos verticais  
 $L_e$  - Comprimento das escoras da estrutura  
LMF – Liga com memória de forma  
 $M_f$  - Final da fase martensítica  
 $M_s$  - Início da fase martensítica  
 $M_0$  - Momento no ponto 0  
NiTi – Liga de níquel titânio  
SMA – Shape memory alloy  
 $u$  - Vetor deslocamento  
 $u_M$  - Vetor deslocamento da mola  
 $u_{ch}$  - Vetor deslocamento dos cabos horizontais  
 $u_{cv}$  - Vetor deslocamento dos cabos verticais  
 $\epsilon$  - Deformação elástica específica  
 $\epsilon_{ch}$  - Deformação elástica específica dos cabos horizontais  
 $\sigma$  - Tensão normal  
 $\sigma_{ch}$  - Tensão normal dos cabos horizontais

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>9</b>
1.1	MOTIVAÇÃO .....	9
1.2	OBJETIVO .....	10
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	10
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>11</b>
2.1	TENSEGRIDADE .....	11
2.1.1	O QUE É TENSEGRIDADE .....	11
2.1.2	PRINCÍPIOS BÁSICOS E CARACTERÍSTICAS DAS ESTRUTURAS TENSÍNTEGRAS .....	12
2.1.3	FUNCIONALIDADES.....	13
2.2	LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA (LMF) .....	13
2.3	VIBRAÇÕES.....	16
2.3.1	GRAUS DE LIBERDADE.....	17
2.3.2	FREQUÊNCIAS NATURAIS.....	18
<b>3</b>	<b>MODELO</b> .....	<b>20</b>
3.1	ESTRUTURA EM “X” .....	20
3.2	MONTAGEM .....	22
3.3	OTIMIZAÇÃO DA FORMA INICIAL.....	25
3.4	ESTRUTURA TENSÍNTEGRA DO TRABALHO .....	27
3.5	MODELOS EM CAD .....	29
<b>4</b>	<b>PARÂMETROS ADOTADOS</b> .....	<b>31</b>
4.1	PROPRIEDADES FÍSICAS E MECÂNICAS FLEXINOL .....	31
<b>5</b>	<b>ANÁLISES E RESULTADOS DA ESTRUTURA EM “X”</b> .....	<b>33</b>
5.1	ANÁLISE ESTÁTICA DA ESTRUTURA “X” .....	33
5.1.1	ESTADO DE PRÉ-TENSÃO DA ESTRUTURA “X” .....	33
5.1.2	EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS.....	34
5.2	ANÁLISE DINÂMICA DA ESTRUTURA “X” .....	38
5.2.1	FASES DO ESTUDO DINÂMICO.....	38
5.2.2	MODELAGEM MATEMÁTICA E NUMÉRICA .....	39
5.2.2.1	MATRIZ DE RIGIDEZ.....	42
5.2.2.2	MATRIZ DE MASSA.....	46
5.2.2.3	ANÁLISE MODAL.....	50

5.2.3	ANÁLISE DA ESTRUTURA “X” POR MEF - ANSYS .....	52
5.2.3.1	ANSYS .....	53
5.2.3.2	PRÉ PROCESSAMENTO .....	54
5.2.3.3	PROCESSAMENTO.....	55
5.2.3.4	PÓS PROCESSAMENTO .....	55
5.2.4	COMPARAÇÃO DAS ANÁLISES DINÂMICAS DA ESTRUTURA EM “X” ...	57
5.3	ANÁLISE DINÂMICA DA ESTRUTURA DO TRABALHO.....	58
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>63</b>
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>65</b>
<b>8</b>	<b>ANEXO A – ROTINA MATLAB – ESTÁGIO INICIAL.....</b>	<b>67</b>
<b>9</b>	<b>ANEXO B – ROTINA MATLAB – ESTÁGIO FINAL .....</b>	<b>69</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As ligas com memória de forma (LMF) são ligas metálicas que exibem duas propriedades características, denominadas de efeito memória de forma e pseudoelasticidade. O efeito memória de forma pode ser entendido como a capacidade do material em memorizar uma forma previamente definida e recuperá-la, após sofrer deformação, por meio da imposição de uma temperatura. Na pseudoelasticidade, por sua vez, o material é capaz de se recuperar de grandes deformações após o relaxamento das tensões que provocaram a sua deformação. Devido a estas propriedades, as ligas com memória de forma se tornaram populares em aplicações envolvendo sensores e atuadores. A crescente demanda da indústria por metamateriais (materiais artificiais modificados de tal modo que adquiram propriedades desejadas que não existem de forma natural.) impulsionou a produção de estruturas inteligentes que usam desses materiais para diferentes aplicações.

O motivo de se estudar a aplicação de ligas com memória de forma em estruturas de tensegridade se dá pelas suas características. Sua relação peso resistência e sua estrutura reticulada beneficiam seu uso como estruturas ativas. De uma forma muito mais eficiente que em estruturas maciças, por exemplo.

A estrutura estudada no presente trabalho é baseada no conceito da tensegridade, sendo que o seu comportamento estrutural face a diversas solicitações dinâmicas será simulado através de modelos computacionais.

Assim, aliamos as características intrínsecas de um material como a liga de memória de forma a uma estrutura capaz de responder aos estímulos desse material para assumir variações na sua geometria.

### 1.1 MOTIVAÇÃO

A empregabilidade de ligas com memória de forma tem aumentado em diversas áreas, muito por conta de sua praticidade e simplicidade. Elas apresentam vantagens em relação a dispositivos como, atuadores e receptores comumente utilizados. Tal

praticidade, tornou possível sua aplicação em diversos sistemas e ainda a criação de estruturas inteligentes, capazes de detectar mudanças em seu estado natural, corrigir de forma autônoma as mesmas e assumir diferentes geometrias de forma programável. O trabalho deste projeto final busca estudar uma estrutura com hastes e cabos de liga com memória de forma, que é capaz de variar sua geometria pela ação das ligas com memória de forma.

## 1.2 OBJETIVO

O objetivo é analisar as condições dinâmicas do movimento de uma estrutura ativa, para as situações mais pertinentes ao trabalho. Avaliar os resultados de análise modal da estrutura por soluções analíticas, comparando seu comportamento ao de uma viga. E por simulações computacionais através de um modelo numérico em MATLAB e pelo software ANSYS.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O capítulo 1 fornece uma introdução, motivação e o objetivo para esse trabalho. O capítulo 2 fornece o embasamento teórico necessário para o desenvolvimento do projeto da estrutura ativa. No capítulo 3 são feitas a pesquisa e o desenvolvimento do modelo da estrutura ativa. No capítulo 4 são apresentadas as características dos materiais adotados no desenvolvimento do trabalho. No capítulo 5 é desenvolvida a análise do problema proposto, com a investigação dos esforços. Também o estudo dinâmico, onde será especificado a equação geral, as matrizes utilizadas e a determinação do comportamento dinâmico da estrutura. O capítulo 6 demonstra as conclusões sobre o que foi encontrado com relação as análises feitas e são discutidas melhorias para pesquisas futuras que deem continuidade a pesquisa realizada neste trabalho. Por fim, no capítulo 7 são expostas as referências bibliográficas do projeto, seguindo para os capítulos 8 e 9 com os anexos do trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O objetivo deste capítulo é contextualizar o trabalho a ser desenvolvido, de modo a abordar termos e conceitos necessários para uma melhor compreensão do projeto.

### 2.1 TENSEGRIDADE

#### 2.1.1 O QUE É TENSEGRIDADE

A junção das palavras “tensão” e “integridade” dão sentido ao nome tensegridade, que foi introduzido inicialmente por Richard Buckminster Fuller e seu aluno Kenneth Snelson. Ambos, são proprietários de patentes relacionadas com este conceito e podem ser considerados como os pais do conceito de tensegridade. Fuller descreveu estruturas desse tipo como um “conjunto de ilhas de compressão em um mar de tensão”. Significa que um sistema baseado em tensegridade (tensão e integridade) é constituído por um conjunto de elementos descontínuos em compressão ligados a um conjunto de elementos contínuos em tração definindo um volume estável no espaço.

Uma estrutura baseada neste conceito pode ser definida como uma estrutura espacial em rede na qual todos os elementos são apenas submetidos a esforços de compressão ou tração. Não existe a preocupação com a flambagem dos elementos rígidos da estrutura, pois estes são descontínuos e funcionam apenas localmente, diferentemente dos cabos contínuos tracionados que são exigidos em longas distancias (Rodrigues, 2014).

## 2.1.2 PRINCÍPIOS BÁSICOS E CARACTERÍSTICAS DAS ESTRUTURAS TENSÍNTEGRAS

O equilíbrio de uma estrutura tensíntegra é garantido através de um estado de auto equilíbrio e pré-esforço entre as escoras comprimidas e os cabos tracionados, portanto, não há necessidade de apoiar ou depender da gravidade para manter o equilíbrio. A característica de compressão descontínua e tração contínua das estruturas de tensegridade juntamente com seu estado de auto equilíbrio e pré-tensão fazem com que essa estrutura tenha características e desempenho únicos. Por exemplo:

- Se o nível de pré-esforço em um sistema tensíntegro aumentar, a sua capacidade de carga também aumenta (Pugh, 1976);
- São soluções estruturais muito leves e esbeltas, com elevado índice de resistência/peso, ou seja, uma estrutura tensíntegra com um dado peso terá maior resistência que uma estrutura convencional com o mesmo peso;
- Devido ao seu peso reduzido e grande flexibilidade, as estruturas tensíntegras são especialmente sensíveis a fenômenos vibratórios;
- Devido à descontinuidade dos elementos comprimidos estes não apresentam esforços de torção;
- Apresentam uma resposta não linear à atuação de cargas, uma vez que, para pequenas cargas, são bastante flexíveis, sendo que a sua rigidez aumenta consideravelmente para solicitações maiores (Jáuregui, 2004).
- Possibilidade de formação de estruturas modulares através de unidades elementares;
- Têm a capacidade de funcionar como um todo, ou seja, uma variação de esforço em um elemento é rapidamente sentida a todos os elementos da estrutura, que encontrará uma nova condição de equilíbrio;

### 2.1.3 FUNCIONALIDADES

É possível construir estruturas genéricas básicas e estáveis que podem ser conectadas entre si para formar uma estrutura maior e mais complexa. Essa é uma vantagem muito atraente para arquitetos e engenheiros, pois podem ser pré-fabricadas, simplificando a construção e a montagem no local, e assim, reduzindo custos relacionados.

O material pode ser utilizado de forma bastante econômica. Alguns elementos podem ser adicionados para aumentar a rigidez de uma determinada estrutura, maximizando assim, a capacidade de carga desses elementos. Sabe-se também que a força é transmitida na menor distância entre dois pontos, de forma que os elementos constituintes da estrutura tenham uma posição estratégica para resistir aos esforços de forma mais eficaz.

E como já falado na introdução, as estruturas de tensegridade são estruturas relativamente leves, e conseqüentemente necessitam de pouca energia para mudar sua forma. Essa característica é fundamental para a sua aplicação no presente trabalho, onde são usadas ligas com memória de forma como atuadores para este tipo de estrutura.

As estruturas de tensegridade também apresentam pontos negativos, que refletem a escassez de seu uso na engenharia. Como a dificuldade em ser montada, pois têm de estar pré tensionadas. Assim como a sua leveza e flexibilidade, que ao mesmo tempo em que são um ponto positivo, para determinadas situações, são as responsáveis pelas altas vibrações que essas estruturas ficam sujeitas (Rodrigues, 2014).

## 2.2 LIGAS COM MEMÓRIA DE FORMA (LMF)

A liga com memória de forma, ou simplesmente SMA (do inglês: "Shape Memory Alloy"), é uma liga metálica. Como o nome sugere, ela pode se lembrar de sua forma original e pode ser aquecida para retornar à sua posição original após a deformação.

Uma das ligas mais comumente usadas e amplamente conhecidas são as ligas de níquel-titânio. O efeito é obtido pela combinação de outros metais, como ouro ou ferro. Nos últimos anos a LMF tem sido amplamente utilizada na indústria automotiva, de tecnologia, aeroespacial e em aplicações biomédicas e robóticas porque constituem uma alternativa muito interessante para atuadores convencionais.

A liga pode ter duas fases distintas: martensita e austenita. Ela pode ser transformada de martensita em austenita por aquecimento, e vice-versa, por resfriamento, conforme mostrado na Figura 1. O efeito de memória de forma está intrinsicamente ligado a possibilidade de transformações cristalinas reversíveis dessas ligas, ou seja, por aquecimento, os átomos da liga são reorganizados para formar uma nova estrutura cristalina estável.

Para representar o comportamento da liga com memória de forma a partir das suas respectivas temperaturas de transformação de fase é usado o gráfico da Figura 1. Há duas curvas no gráfico, que representam as situações de aquecimento e arrefecimento da liga. Como pode-se ver através do gráfico, à medida que acompanhamos a curva de arrefecimento (inferior), a porcentagem de fase martensítica da liga aumenta, com o início da transformação de fase martensítica em  $M_s$  até atingir uma transformação completa da martensítica em  $M_f$ . Nesse momento a liga é composta por apenas uma fase, martensita. Na curva de aquecimento (superior) as composições de fase na liga mudam, iniciando a transformação de fase austenítica em  $A_s$  e concluindo a transformação da fase em  $A_f$ . Este gráfico é dado para a liga em um estado sem tensão, e não será idêntico para todas as ligas de memória de forma. Seu desenho muda de acordo com a composição química, processos de fabricação e propriedades mecânicas da liga.

Existe uma dissipação de energia envolvendo o ciclo de aquecimento e arrefecimento da liga, essa dissipação de energia está ligada a área formada entre as duas curvas. E a esse fenômeno se dá o nome de histerese (Rodrigues, 2014).

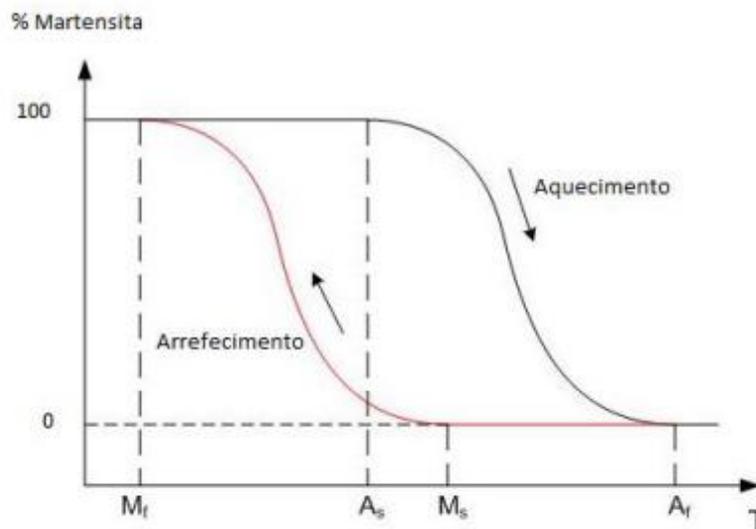


Figura 1- EVOLUÇÃO DA FRAÇÃO MARTENSÍTICA EM FUNÇÃO DA TEMPERATURA NA LIGA LMF  
Fonte: Rodrigues (2014)

O comportamento quase plástico das ligas com memória de forma é dado em temperaturas abaixo de  $M_f$ , onde a liga apresenta uma deformação residual devido a reorientação martensítica induzida mecanicamente (Krishnan et al., 1974). Já a pseudoelasticidade é dada em temperaturas acima de  $A_f$ , nessa condição a liga, após ser deformada, tem sua forma recuperada quando retirada a tensão (Castilho e Silva, 2011).

Existem duas distinções de comportamento das ligas de memória de forma. Que são as ligas com o comportamento de memória unidirecional e as ligas com comportamento bidirecional (duas vias).

Nas ligas com comportamento unidirecional, as deformações sofridas abaixo da temperatura  $A_s$  são mantidas e a liga recupera sua forma original após seu aquecimento acima da temperatura de  $A_s$ . Se após o aquecimento a liga for resfriada, ela irá manter seu formato original admitido após o aquecimento, e só irá alterar sua forma se for deformada novamente.

Nas ligas de duas vias, a liga pode admitir uma forma para a baixa temperatura e outra forma para a alta temperatura, somente com a mudança da sua temperatura (Rodrigues, 2014).

Porém, a liga com memória de forma tem algumas deficiências. Uma delas é no tempo de resposta. Atuadores de liga de memória de forma geralmente são ativados através da passagem de corrente elétrica pelo material, resultando em um aquecimento da liga devido ao efeito Joule. Por outro lado, a desativação é conseguida somente por

convecção, através da transferência de calor com o ambiente exterior, resultando em uma atuação assimétrica, na qual o tempo de desativação é muito maior que o tempo de ativação. Existem algumas tentativas de diminuir tal assimetria através de mecanismos de convecção forçada, procurando reduzir o tempo de desativação dos atuadores.

Nas ligas de memória de forma NiTi a tensão de escoamento (limite de elasticidade) pode chegar aos 500 MPa. É relativamente superior à grande maioria dos metais comuns utilizados em engenharia.

### 2.3 VIBRAÇÕES

O conceito de vibração para Keith (1999) é um movimento periódico, ou um movimento que se repete após certo intervalo de tempo chamado de período, ( $T$ ). Segundo Zhi-Fang (2001), vibração é um movimento que se repete. Essa repetição pode ou não ser perpétua. A repetição também não precisa ser necessariamente uma cópia exata, pois algumas vibrações podem se repetir de forma estatística. A Figura 2 ilustra o movimento periódico no domínio do tempo de um rolamento de uma turbina a vapor. O eixo vertical representa o deslocamento (sendo ele um ponto de referência  $X_0$  qualquer) e o eixo horizontal representa o tempo. Na Figura 3 as linhas pontilhadas representam as componentes harmônicas (tipo de movimento periódico) e a linha contínua representa a componente não periódica.

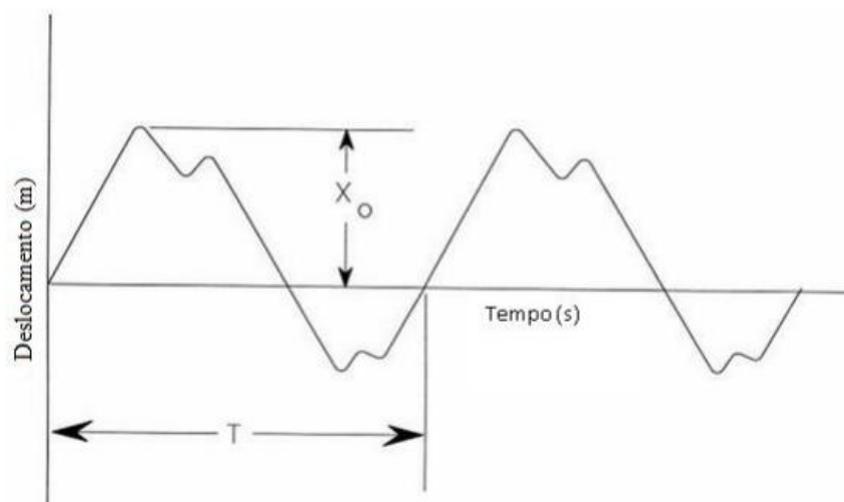


Figura 2 - MOVIMENTO PERIÓDICO DE UM ROLAMENTO DE UMA TURBINA A VAPOR  
Fonte: Keith (1999)

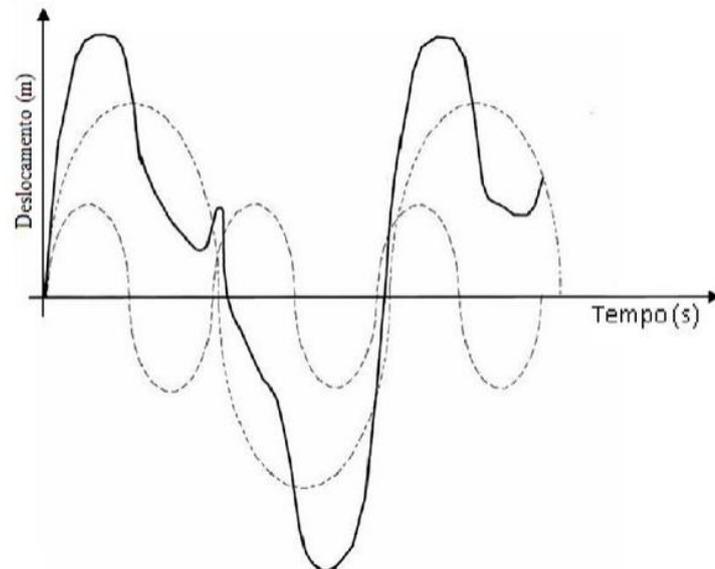


Figura 3 – REPRESENTAÇÃO DE CURVAS HARMÔNICAS E NÃO HARMÔNICA NO DOMÍNIO DO TEMPO  
Fonte: Keith (1999)

Como a vibração pode ser considerada como uma transferência de energia cinética para potencial e potencial para cinética, o sistema vibratório deve ter meios de armazenar e liberar ambas as energias. A Figura 4 ilustra dois exemplos.

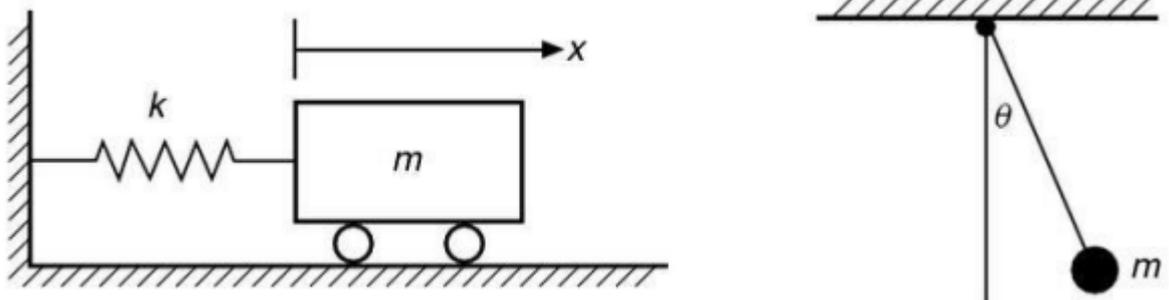


Figura 4 – SISTEMA MASSA-MOLA E SISTEMA PENDULAR  
Fonte: Zhi-Fang (2001)

### 2.3.1 GRAUS DE LIBERDADE

Para que o estudo da vibração de um sistema dinâmico seja possível, é essencial saber quantos graus de liberdade o sistema possui. Segundo Zhi-Fang (2001), o número de graus de liberdade é dado pelo número mínimo de coordenadas independentes

necessário para determinar as posições de todas as partes de um sistema em qualquer instante de tempo. Para Keith (1999), o grau de liberdade de um sistema indica quantos deslocamentos generalizados são necessários para expressar geometricamente sua posição em um instante de tempo.

### 2.3.2 FREQUÊNCIAS NATURAIS

As frequências naturais indicam a taxa de oscilação livre da estrutura, depois de cessada a força que provocou o seu movimento. Em palavras similares, representa o quanto a estrutura vibra quando não há força aplicada sobre ela (Bolina et al. 2014, p.1). Elas são dadas normalmente em Hertz (Hz), e são diretamente proporcionais à raiz de rigidez da estrutura e inversamente proporcionais à raiz da massa. Uma estrutura pode vibrar em diversas frequências naturais, entretanto a mais importante é a primeira, que possui o menor valor e é conhecida como a frequência fundamental. Na engenharia essa frequência fundamental é de extrema importância, pois os calculistas têm de garantir que independentemente da carga que venha atuar na estrutura, a vibração gerada não atingirá esse valor. No caso de uma estrutura atingir o valor citado, entrará em ressonância. Este fenômeno ocorre quando um sistema físico é excitado por frequências iguais as suas frequências naturais de vibração. Assim, este sistema passa a vibrar com amplitudes cada vez maiores, e quando isso acontece em uma estrutura, pode-se chegar à sua ruptura total. Um caso muito famoso é o da ponte Tacoma Narrows (Figura 5) que quando atingida por um vento de aproximadamente 70 km/h começou a oscilar com grandes amplitudes entrando em ressonância e indo à ruptura total. Cada frequência natural apresenta sua forma de vibrar, isso é conhecido como os modos de vibração. Um exemplo desses modos pode ser encontrado na Figura 6, que mostra as três primeiras formas para uma corda presa nas duas pontas.



Figura 5 – PONTE TACOMA NARROWS APÓS RUPTURA DEVIDO À RESSONÂNCIA

Fonte: <https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/pedagogia/ressonancia-o-curiosocaso-da-ponte-tacoma-narrows/41429#>

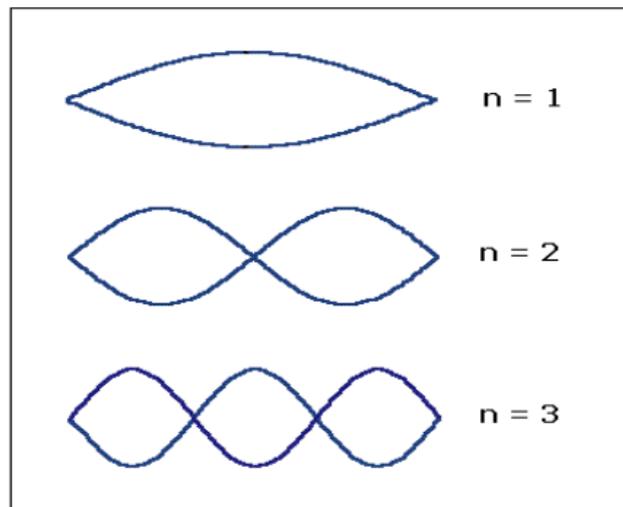


Figura 6 – OS TRÊS PRIMEIROS MODOS DE VIBRAÇÃO PARA UMA CORDA

Fonte: <http://www.ifba.edu.br/fisica/nfl/fge2/praticas/cordasVibrantes.html>

### 3 MODELO

Para simplificar o problema e facilitar a análise inicial, irá se adotar um tipo de estrutura mais simples o quanto possível. Essas estruturas mais simples serão a base de estruturas mais complexas e de maiores dimensões. Partindo assim, do estudo e entendimento de um elemento mais simples, para em seguida, abordar a situação mais complexa como um todo.

Apesar da aparente simplicidade dessas estruturas, elas permitem adotar a tensegridade em estruturas mais complexas e de maior interesse.

Outra simplificação é que por agora não irá se adotar o uso da liga com memória de forma como um dos possíveis elementos da estrutura “X”. Somente corpos rígidos sob compressão e cabos ideais sob tração serão considerados nessa primeira análise.

#### 3.1 ESTRUTURA EM “X”

A estrutura tensíntegra mais simples é uma estrutura em “X” a duas dimensões, constituída por duas escoras e por quatro cabos, tal como se pode ver na Figura 7. Esta estrutura é a base de muitos trabalhos e investigações, uma vez que apresenta algumas propriedades interessantes, nomeadamente a sua simplicidade e facilidade de montagem para utilização em modelos à escala reduzida. Esta estrutura é muitas vezes utilizada em construções modulares através da sobreposição de várias estruturas em “X”, formando torres de duas ou de três dimensões.

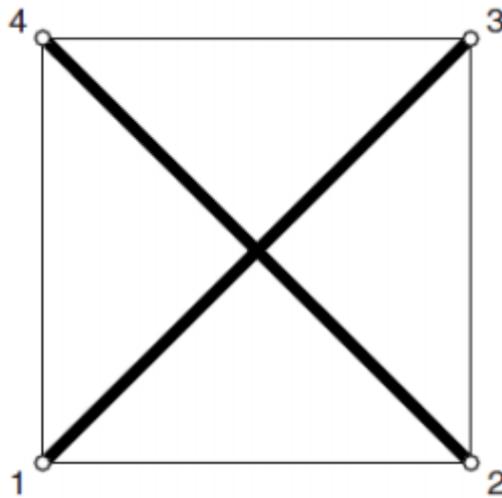


Figura 7 - ESTRURA EM "X"

A estrutura adotada neste trabalho irá se basear na estrutura tensíntegra em "X", pelo que mais à frente será realizado um estudo alargado das suas propriedades.

Outra estrutura de menor complexidade também, é o prisma triangular da Figura 8. Também é objeto de estudo em trabalhos sobre tensegridade, servindo, assim como a estrutura em "X", de elemento base para estruturas mais complexas.

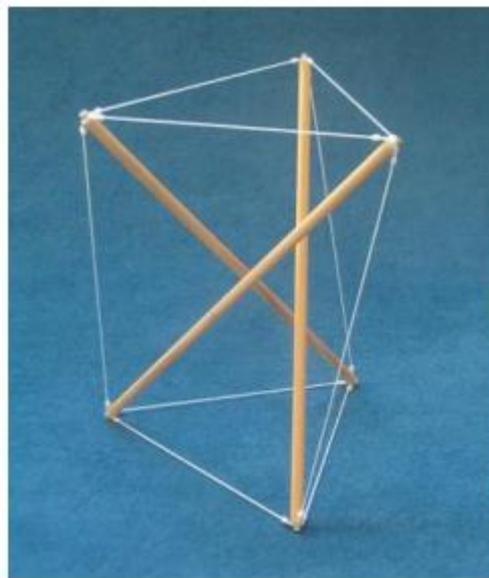


Figura 8 - PRISMA TRIANGULAR

Fonte: <http://teachersofindia.org/en/activity/weekend-activity-how-tension-makes-structures-stable>

## 3.2 MONTAGEM

Na montagem, a liga com memória de forma e os demais componentes da estrutura foram estudados para criar um arranjo favorável à situação desejada. Como por exemplo, minimizar os esforços necessários às ligas com memória de forma e otimizar os deslocamentos.

Um dos problemas iniciais é enfrentar deslocamentos significativos exigidos. Em contrapartida ao fio que se limita a deformações máximas na faixa de 5 a 10%.

A pré-carga sobre os cabos da liga, aplicada no momento da montagem, será prevista para uma deformação de aproximadamente 4% dos cabos da liga de memória de forma. O que irá garantir que a liga seja capaz de recuperar sua forma original após a aplicação de um carregamento térmico. Além disso, a pré-carga deve ser suficiente para proporcionar uma rigidez mínima a estrutura.

É de se esperar que os cabos sofram grandes extensões para permitir o movimento pretendido. No entanto, sabe-se que os materiais mais recorrentes não permitem grandes extensões sem sofrerem plastificações relevantes. Para fazer face a esta dificuldade é trabalhada com a hipótese de usar molas helicoidais de tração no lugar dos cabos. E uma grande vantagem da utilização de molas é a simplificação na construção de um protótipo, caso venha ser necessário em futuras análises experimentais. Sendo possível controlar, mais facilmente, a força de pré-carga imposta na estrutura (através do conhecimento da constante elástica  $K$  da mola e da sua extensão face à posição indeformada).

A 1° e 2° maneiras de montar os fios e molas na estrutura trabalham de modo similar, no sentido do layout na estrutura em "X". Com os elementos iguais sendo colocados opostos uns aos outros. Sendo que na 1° forma de montagem (Figura 9) a LMF - após sua extensão de aproximadamente 4% - atuará no sentido de tornar a estrutura mais baixa e larga quando recuperar sua forma pelo aquecimento da liga. E na 2° forma da montagem da estrutura (Figura 10) atuará no sentido oposto.

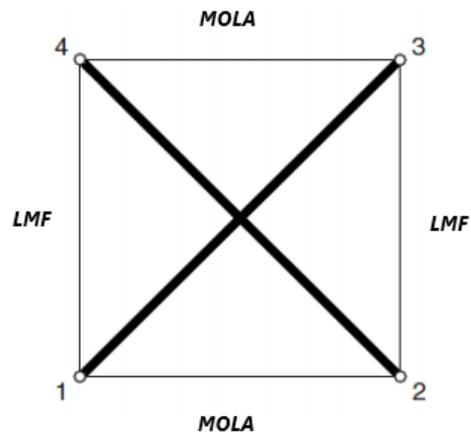


Figura 9 - PRIMEIRA MONTAGEM DA ESTRURA EM "X"

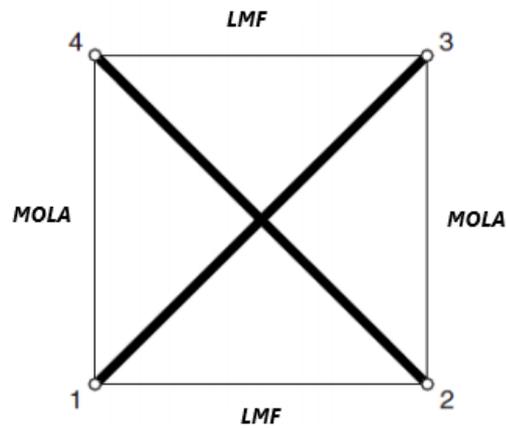


Figura 10 - SEGUNDA MONTAGEM DA ESTRURA EM "X"

A 3ª montagem (Figura 11) menos conveniente que as montagens 1ª e 2ª, exige maior força do fio que nas situações anteriores. Por contar com apenas um cabo de LMF entre os demais elementos da estrutura tensíntegra.

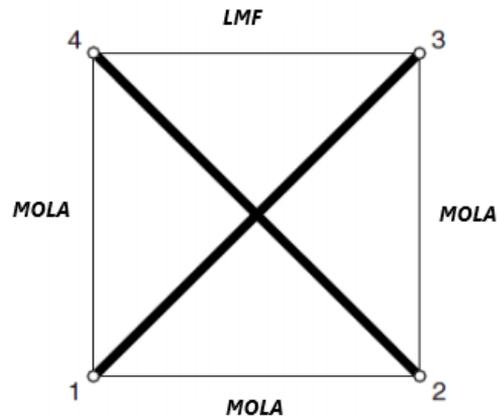


Figura 11 – TERCEIRA MONTAGEM DA ESTRURA EM "X"

E com a 4ª montagem (Figura 12) o movimento se torna impossível, pois os elementos iguais estão em oposição.

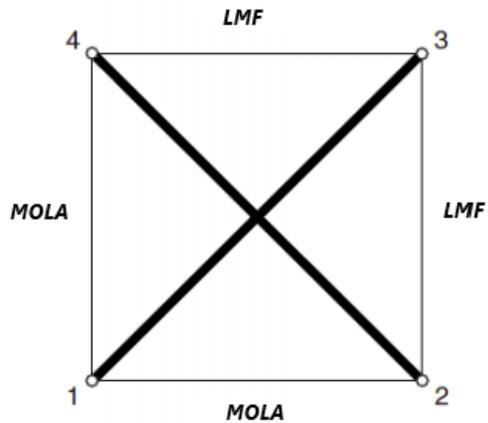


Figura 12 – QUARTA MONTAGEM DA ESTRURA EM "X"

Portanto adotou-se a escolha da 2ª montagem para análise da estrutura tensíntegra em "X" com elementos de LMF e molas.

### 3.3 OTIMIZAÇÃO DA FORMA INICIAL

Procurou-se conhecer as dimensões que a estrutura terá de ter para maximizar a eficiência dos deslocamentos da estrutura. A permitir que a estrutura assuma a maior variação possível de sua própria geometria. Ou seja, procurou-se conhecer qual a influência da geometria inicial da estrutura na eficácia de sua variação de forma.

As ligas com memória de forma permitem extensões de 4%, o que permite que a estrutura varie seu comprimento (como está exemplificado na Figura 13, para uma estrutura em "X" com uma geometria inicial de 1,0 x 1,0 (m x m)).

Para representar a influência da forma inicial na eficácia da sua variação de forma, definiu-se um gráfico no EXCEL em que se apresentam os deslocamentos, ou seja, a variação do seu comprimento vertical e horizontal inicial (antes da ativação das ligas) e final (após a ativação das ligas) em função do ângulo  $\theta$  (theta) da estrutura, formado entre uma escora e um cabo horizontal.

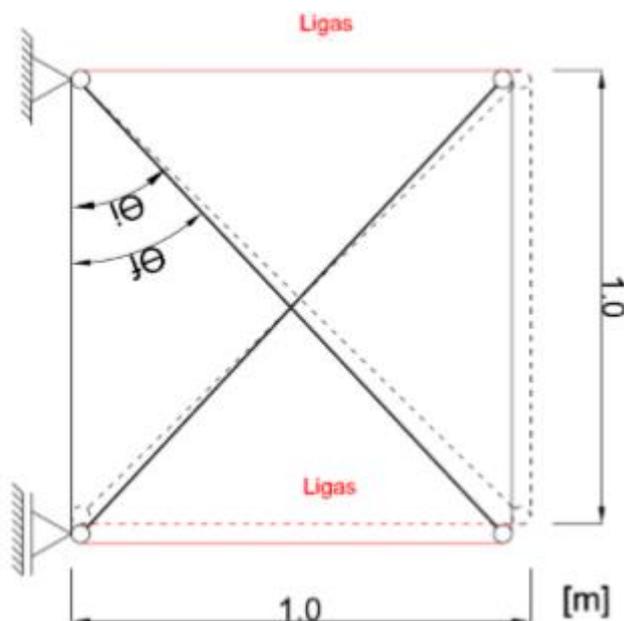


Figura 13 - MOVIMENTO DA ESTRUTURA EM "X" MOTIVADO POR UMA EXTENSÃO DE 4% NAS LIGAS LMF

De acordo com a Figura 13, pode ser vista a representação das condições de contorno da estrutura em "X". Ela está sob a condição de dois apoios (um fixo superior esquerdo e um móvel inferior esquerdo) que não restringem seus movimentos durante sua mudança de forma. Deduz-se que está sendo considerado apenas a análise dos

movimentos no plano “xy”, se tratando assim de uma análise bidimensional.

Considerou-se uma extensão nos cabos horizontais de 4%, sendo que se definiu uma geometria inicial de 1,0 x 1,0 (m x m), como a representada na Figura 13. Procedeu-se a incrementos de 0,1 m no comprimento dos cabos horizontais (LMF) e calculou-se os deslocamentos de interesse.

Cabe destacar que a avaliação para a ótima geometria inicial não leva em conta os esforços estáticos e nem dinâmicos sobre a estrutura. Procura-se aqui, avaliar apenas seu comportamento cinemático. Por isso considera-se que a rigidez axial, quer das ligas, quer das molas e das escoras é constante durante o processo. Os tópicos que abordam as propriedades mecânicas das ligas, como a variação do seu módulo de elasticidade provocado pela sua mudança de fase, serão vistos mais à frente.

Conclui-se a partir da análise no EXCEL que a eficiência dos deslocamentos aumenta exponencialmente com o aumento do ângulo  $\theta$  (theta). No entanto, uma estrutura em “X” muito esbelta, poderia apresentar problemas de estabilidade. Outro problema seria que os cabos verticais (a mola no protótipo) para acompanharem o movimento da estrutura teriam de apresentar uma grande elasticidade e apresentar extensões na ordem dos 50%, o que não se prevê que seja muito fácil para os materiais comuns.

Logo, considerou-se como ótima a estrutura em “X” com a geometria de 3,0 x 1,0 (m x m), ou seja, o comprimento dos cabos horizontais é três vezes superior ao comprimento dos cabos verticais ( $\theta = 71,57^\circ$ ).

A geometria preconizada está ilustrada na Figura 14. Está também indicada a variação dos comprimentos dos cabos verticais e dos cabos horizontais, resultante do aquecimento das LMF. Note-se que é considerado que o comprimento das escoras é constante durante a ativação das LMF. Em rigor, a ativação das ligas aumenta a compressão nas escoras, o que conduz a uma extensão nas escoras não nula, no entanto, os deslocamentos exibidos pela estrutura são muito superiores à extensão sofrida pelas escoras, pelo que se pode ignorar a mesma.

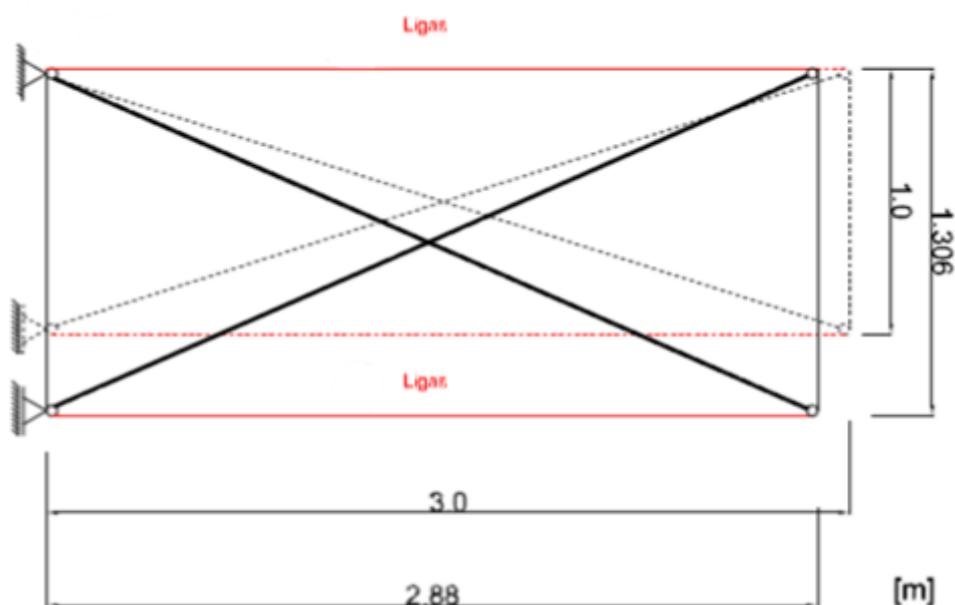


Figura 14 - GEOMETRIA ÓTIMA DA ESTRUTURA EM "X", E A VARIAÇÃO DE COMPRIMENTO DOS SEUS ELEMENTOS DEVIDO À ATIVAÇÃO DAS LIGAS LMF

Note-se que, na Figura 14, a estrutura da linha tracejada representa a estrutura em que as LMF estão a temperatura ambiente e, a linha cheia representa a estrutura após ativação das LMF. Também é possível observar como os apoios (condição de contorno adotada) agem diante da mudança de forma da estrutura em "X".

### 3.4 ESTRUTURA TENSÍNTegra DO TRABALHO

A estrutura proposta neste tópico é resultado do acoplamento de três estruturas elementares do tipo "X". O sistema estrutural dessa estrutura mais complexa é baseado no comportamento da estrutura em "X", analisada previamente no capítulo 3.1. Irá se utilizar a estrutura em "X" como unidade básica.

A estrutura está ilustrada esquematicamente na Figura 15. Cada unidade básica é constituída por duas escoras descontínuas e comprimidas e quatro cabos tracionados.

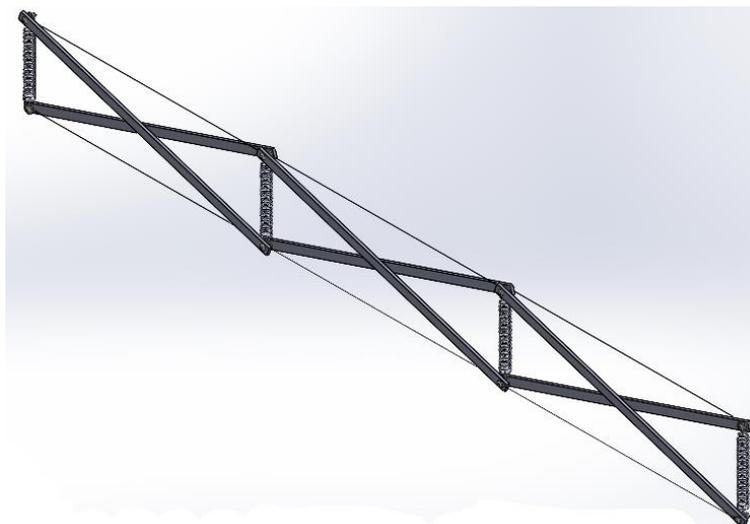


Figura 15 – ESTRUTURA TENSÍNTEGRA ESQUEMATIZADA EM ESCALA

Os atuadores na estrutura são as ligas com memória de forma, ou seja, pretende-se que os cabos horizontais do elemento em “X” sejam constituídos por LMF. Uma maneira de ativar a estrutura seria mediante a aplicação de uma corrente eléctrica nas ligas, estas aumentam a sua temperatura por efeito de Joule, variando a sua estrutura cristalina, sofrendo extensões na ordem dos 4 a 5%.

Para diferentes tipos de situações e/ou aplicações a estrutura será capaz de controlar a temperatura nas ligas com memória de forma, permitindo que estas diminuam o seu comprimento em cerca de 4 a 5%.

Uma vez que as LMF permitem extensões na ordem dos 4 a 5%, a estrutura poderá variar entre duas configurações extremas: uma mais comprida e outra menos comprida. Assim, a estrutura tensínegra idealizada terá a capacidade de alternar entre duas configurações com dimensões diferentes (rigidez diferentes) e, conseqüentemente, com frequências próprias diferentes, como se verá com maior rigor mais à frente. Assim, esta estrutura terá a possibilidade de alterar a sua frequência própria e assim afastar-se de fenómenos de ressonância. A mitigação das acelerações na estrutura é então conseguida através da variação da configuração da estrutura.

Os apoios da estrutura não poderão restringir os movimentos descritos em sua mudança de forma, pelo que um dos apoios deverá ser fixo, enquanto o outro apoio deverá ser móvel.

Será também desenvolvida uma descrição do modelo reduzido construído em CAD e quais os materiais empregues nele, assim como algumas considerações feitas.

### 3.5 MODELOS EM CAD

O modelo desenvolvido em CAD, representando um protótipo em escala reduzida, segue o padrão de modelos experimentais usados em análises de outros trabalhos semelhantes. Foram adotadas dimensões baseadas na possibilidade de construir, em um trabalho futuro, um modelo a escala reduzida para possíveis análises experimentais. Sendo assim, as dimensões da estrutura nos estágios inicial e final seguem as Tabelas 1 e 2 respectivamente:

Tabela 1 - INFORMAÇÕES DIMENSIONAIS E GEOMETRICA DA ESTRUTURA NO ESTÁGIO INICIAL

<b>Geometria no estágio inicial</b>	
Comprimento das escoras da estrutura ( $L_e$ )	475 mm
Comprimento dos cabos verticais ( $L_{cv}$ )	450 mm
Comprimento dos cabos horizontais ( $L_{ch}$ )	150 mm
Ângulo formado entre uma escora e um cabo horizontal ( $\Theta$ )	71,57 °

Tabela 2 - INFORMAÇÕES DIMENSIONAIS E GEOMETRICA DA ESTRUTURA NO ESTÁGIO FINAL

<b>Geometria no estágio final</b>	
Comprimento das escoras da estrutura ( $L_e$ )	475 mm
Comprimento dos cabos verticais ( $L_e$ )	432 mm
Comprimento dos cabos horizontais ( $L_{ch}$ )	195,9 mm
Ângulo formado entre uma escora e um cabo horizontal ( $\Theta$ )	65,61 °

Os cabos horizontais das estruturas básicas em “X” são constituídos por LMF do tipo NiTi com um diâmetro de 0,375 mm. Os elementos verticais são constituídos por molas de tração helicoidais

Sabendo-se a força de pré-carga necessária para a estrutura assumir sua geometria inicial no momento da montagem, com aproximadamente 4% de deformação linear do cabo. o valor da constante elástica  $K$  da mola e a extensão dela para a montagem da estrutura podem ser calculados. Pois, sabe-se que existe uma pré-tensão ideal para a estrutura e que a mesma pode ser calculada. Logo, de posse dessa informação e da constante elástica  $K$  da mola helicoidal escolhida, é possível encontrar o comprimento relaxado e o deslocamento necessário na mola, no momento de montar a estrutura. Essa última relação pode ser calculada através da lei de Hooke.

As escoras da estrutura serão consideradas como ligas de aço estrutural A-36 com um comprimento de 475 mm e com uma secção transversal retangular com as

dimensões: 15,0 x 5,0 [mm x mm]. Podem ser facilmente fabricadas a partir de tubos de aço com parede plana de 5,0 mm de espessura ou com chapas dessa espessura. Esses critérios foram consultados em catálogos comerciais de tubos e chapas de aço. Uma vez que se pretende manter uma relação entre o comprimento dos cabos verticais e o comprimento dos cabos horizontais próxima da relação ótima encontrada no capítulo 3.3 de otimização da forma inicial (3 por 1), optou-se por um comprimento dos elementos verticais (molas) de 150 mm e um comprimento dos cabos horizontais (LMF) de 450 mm.

Compatibilidade das relações geométricas do elemento “X” da estrutura:

$$L_e = \sqrt{(L_{Cv})^2 + (L_{Ch})^2} \quad (5)$$

A Figura 16 ilustra o modelo, em escala, da estrutura “X”.

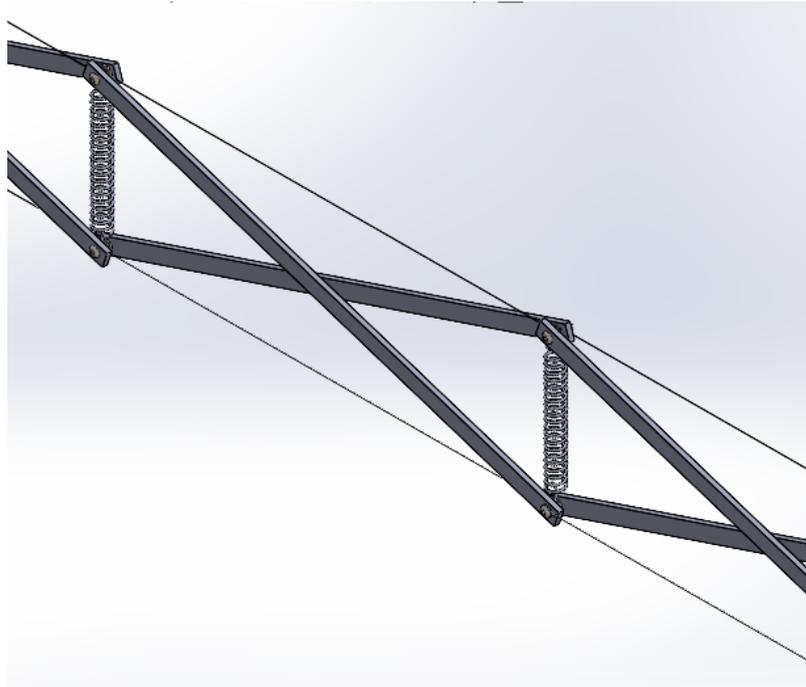


Figura 16 – IMAGEM ILUSTRATIVA DE UM MODELO EM ESCALA, CRIADO EM SOLIDWORKS, AO SER MONTADO (ESTÁGIO INICIAL)

Quanto as condições de contorno para a movimentação da estrutura, ela está apoiada em um apoio fixo e um móvel.

O apoio móvel permite que o nó inferior deslize livremente segundo o eixo vertical, mas que não tenha deslocamentos horizontais.

## 4 PARÂMETROS ADOTADOS

### 4.1 PROPRIEDADES FÍSICAS E MECÂNICAS FLEXINOL

A LMF utilizada como referência são as ligas de Níquel e Titânico com o nome comercial de Flexinol, produzidas pela marca Dynalloy, Inc. Das especificações técnicas fornecidas pelo fabricante é possível indicar algumas propriedades físicas importantes da liga Flexinol:

- Diâmetro: 0.375 mm;
- Densidade: 6450 Kg/m<sup>3</sup>;
- Calor específico: 0.077 cal/g.°C;
- Ponto de fusão: 1300 °C;
- Condutividade térmica:
  - Austenítica: 0.18 W/cm °C;
  - Martensítica: 0.08 W/cm °C;
- Resistência elétrica aproximada:
  - Austenítica: 82 micro-ohms.cm;
  - Martensítica: 76 micro-ohms.cm;

O módulo de elasticidade das ligas LMF é muito importante, nomeadamente na fase da modelação computacional da estrutura ativa que se está a analisar. O módulo de elasticidade destas ligas varia conforme a fase em que esta se encontra, uma vez que, a variação da estrutura cristalina das ligas leva a uma variação do módulo de elasticidade. Na bibliografia relativa a esta temática, o módulo de elasticidade varia bastante, assim como a composição relativa da mesma. Para as ligas compostas por 50% de titânio e 50% de níquel (tal como a liga Flexinol, Figura 17), o módulo de elasticidade na fase martensítica varia entre os 28 GPa e os 36 GPa, enquanto na fase austenítica, o módulo de elasticidade varia entre os 60 GPa e os 75 GPa. O coeficiente de Poisson das ligas NiTi varia entre os 0,30 e os 0,33, dependendo da marca que comercializa a liga.

Um parâmetro importante obtido de uma tabela da Dynalloy (Figura 17), é o valor recomendado de tensão na liga para recuperação da memória de forma (Rec Recovery Weight = 190 MPa).

<b>Properties</b>	Flexinol Name	025	037	050	075	100	125	150	200	250	300	375
<b>Physical</b>	Wire Diameter (µm)	25	37	50	75	100	125	150	200	250	300	375
	Minimum Ben Radius (mm)	1.3	1.85	2.5	3.75	5.0	6.25	7.5	10.0	12.50	15.0	18.75
	Cross-sectional Area (µm <sup>2</sup> )	490	1,075	1,960	4,420	7,850	12,270	17,700	31,420	49,100	70,700	110,450
<b>Electrical</b>	Linear Resistance (Ω/m)	1,770	860	510	200	150	70	50	31	20	13	8
	Recommended Current <sup>f</sup> (mA)	20	30	50	100	180	250	400	610	1,000	1,750	2,750
	Recommended Power <sup>f</sup> (W/m)	0.71	0.78	1.28	2.0	4.86	4.4	8.00	12.0	20.0	39.8	60.5
<b>Strength*</b>	Max. Recovery Weight @ 600 MPa (g)	29	65	117	250	469	736	1,056	1,860	2,933	4,240	6,630
	Rec. Recovery Weight @ 190 MPa (g)	7	20	35	80	150	230	330	590	930	1,250	2,000
	Rec. Deformation Weight @ 35 MPa (g)	2	4	8	815	28	43	62	110	172	245	393
<b>Speed</b>	Typical Contraction Speed <sup>ff</sup> (sec)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	LT Relaxation Speed <sup>ff</sup> (sec)	0.16	0.25	0.3	0.5	0.8	1.6	2.0	3.5	5.5	8.0	13.0
	LT Alloy Thermal Cycle Rate (cyc/min)	52	48	46	40	33	23	20	13	9	7	4
	HT Relaxation Speed <sup>ff</sup> (sec)	n.a.	0.09	0.1	0.2	0.4	0.9	1.2	2.2	3.5	6	10
	HT Alloy Thermal Cycle Rate (cyc/min)	n.a.	55	55	50	43	32	27	19	13	9	5

Figura 17 – TABELA COM DADOS DA LMF FLEXINOL  
Fonte: Adaptado Dynalloy, Inc.

## 5 ANÁLISES E RESULTADOS DA ESTRUTURA EM “X”

Dois aspectos foram analisados na estrutura em “X”. Um deles é referente aos esforços estáticos e o outro é referente ao comportamento dinâmico, mais precisamente a análise modal da estrutura. Nos subtópicos seguintes são apresentados os estudos e seus resultados.

### 5.1 ANÁLISE ESTÁTICA DA ESTRUTURA “X”

A estática estuda corpos e sistemas nos quais estão em repouso ou com velocidade constante. Ela estuda as condições nas quais as forças atuantes sobre um corpo se equilibram, dessa forma, de acordo com a segunda lei de Newton, sua aceleração é nula.

Portanto, a soma vetorial de todas as forças que agem sobre o corpo deve ser igual a zero, assim como, o somatório dos momentos.

#### 5.1.1 ESTADO DE PRÉ-TENSÃO DA ESTRUTURA “X”

Apesar de não ter uma aplicação imediata no trabalho, o assunto abordado neste capítulo é valioso como um primeiro passo para entender mais a respeito das estruturas de tensegridade.

Para o cálculo inicial do estado pré-tensionado, os cabos em tração assumem papel de elementos rígidos. Assim, uma das hipóteses para o cálculo analítico é considerar os cabos e hastes da estrutura “X” como elementos de treliça, sendo os cabos em tração e as escoras em compressão.

Uma treliça consiste em elementos retos unidos por nós. Nenhum elemento é contínuo através de um nó. E seus elementos estão sob efeito de esforços normais, de tração ou compressão.

Dessa forma pode-se investigar os esforços e tensões sob os elementos pelo método dos nós, e pelo método das seções. Ou também analisando o somatório dos momentos sob umas das escoras. Ambos a partir da premissa do equilíbrio estático. Certas vezes antecedendo a qualquer um desses métodos é aplicado um diagrama de corpo livre (D.C.L) da estrutura como um todo.

Considerações:

1. Os pontos de apoio da estrutura não são estáticos, pois se movimento junto com o elemento que está sendo estudado;
2. O conjunto não está contido em um plano, já que as escoras se cruzam sem que uma atravesse pela outra;
3. Os pontos de ligação entre os elementos da estrutura (haste, mola e LMF) serão considerados pinos;

### 5.1.2 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Na Figura 18, são ilustradas as considerações feitas anteriormente para a análise da estrutura e como estão representadas as dimensões dos seus elementos.

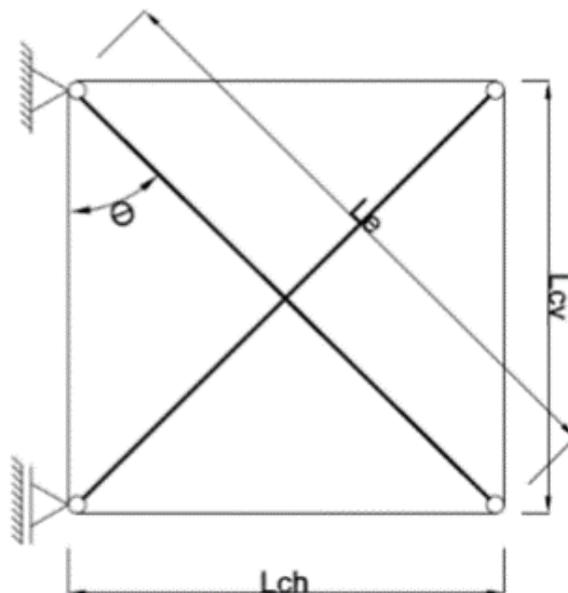


Figura 18 - ESTRUTURA EM "X" ANALISADA

(Análise cinética)

$$\cos\theta = \frac{L_{Cv}/2}{L_e/2} \rightarrow L_{Cv} = L_e \cos\theta \quad (1)$$

$$\sin\theta = \frac{L_{Ch}/2}{L_e/2} \rightarrow L_{Ch} = L_e \sin\theta \quad (2)$$

A relação entre as forças verticais e horizontais nos cabos pode ser encontrada através do somatório dos momentos no centro de qualquer uma das hastes  $M_0$ , Figura 19.

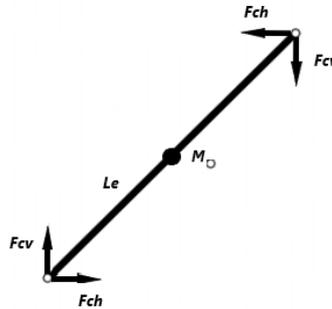


Figura 19 – SOMATÓRIO DE MOMENTO NA HASTE DA ESTRUTURA “X”

(Eq. de equilíbrio)

$$\sum M_0 = 0$$

$$2 F_{Ch} \frac{L_e \sin\theta}{2} - 2 F_{Cv} \frac{L_e \cos\theta}{2} = 0 \quad (3)$$

$$F_{Ch} \sin\theta = F_{Cv} \cos\theta$$

$$F_{Cv} = F_{Ch} \operatorname{tg}\theta \quad (4)$$

As seguintes equações constitutivas são discutidas para que se possa entender todos os conceitos envolvidos no cálculo de pré-tensão da estrutura. Logo, além de comentários são listadas as principais fórmulas de cada conceito.

Lei de Hooke:

A lei de Hooke estabelece que, quando uma mola é deformada por alguma força externa, uma força elástica restauradora passa a ser exercida na mesma direção e no sentido oposto à força externa. Essa força elástica, por sua vez, é variável

e depende do tamanho da deformação que é sofrida pela mola.

$$\begin{aligned} F_M &= K_M u_M \\ F_{Cv} &= K_{Cv} u_{Cv} \end{aligned} \quad (5)$$

Tensão normal:

A tensão descreve a intensidade da força interna sobre um plano específico (área) que passa por determinado ponto. A tensão normal é a intensidade da força que atua no sentido perpendicular a  $\Delta_A$  por unidade de área ( $\sigma$ ).

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A} \\ \sigma_{Ch} &= \frac{F_{Ch}}{A_{Ch}} \end{aligned} \quad (6)$$

Módulo de elasticidade:

O módulo de elasticidade, ou também conhecido como módulo de Young, é a razão entre a tensão e a deformação na direção da carga aplicada, sendo a máxima tensão que o material suporta sem sofrer deformação permanente.

A maioria dos materiais da engenharia apresentam relação linear entre tensão e deformação na região de elasticidade. Essa característica é conhecida como Lei de Hooke.

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{\epsilon} \\ E_{Ch} &= \frac{\sigma_{Ch}}{\epsilon_{Ch}} \end{aligned} \quad (7)$$

Deformação específica:

A deformação específica é encontrada dividindo-se a variação no comprimento de referência  $u$ , pelo comprimento de referência inicial  $L_0$ .

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{u}{l} \\ \epsilon_{Ch} &= \frac{u_{Ch}}{l_{Ch}} \end{aligned} \quad (8)$$

Constante elástica:

A constante elástica mede a rigidez da mola, isto é, a força que é necessária para fazer com que a mola sofra uma deformação.

$$K = \frac{E A}{l}$$

$$K_{Ch} = \frac{E_{Ch} A_{Ch}}{l_{Ch}} \quad (9)$$

No fio com liga de memória de forma:

$$\sigma_{Ch} = E_{Ch} \epsilon_{Ch} \quad (10)$$

$$F_{Ch} = E_{Ch} \frac{u_{Ch}}{l_{Ch}} A_{Ch} \rightarrow F_{Ch} = \frac{E_{Ch} A_{Ch}}{l_{Ch}} u_{Ch}$$

$$F_{Ch} = K_{Ch} u_{Ch} \quad (11)$$

Sendo:

$$F_{Ch} = F_{Cv} \operatorname{tg}\theta \quad (4)$$

$$F_{Cv} = K_{Cv} u_{Cv} \quad (5)$$

$$F_{Ch} = \frac{E_{Ch} A_{Ch}}{l_{Ch}} u_{Ch} \quad (12)$$

$$F_{Ch} = K_{Cv} u_{Cv} \operatorname{tg}\theta \rightarrow \frac{E_{Ch} A_{Ch}}{l_{Ch}} u_{Ch} = K_{Cv} u_{Cv} \operatorname{tg}\theta \rightarrow u_{Cv} = \frac{E_{Ch} A_{Ch} u_{Ch}}{l_{Ch} K_{Cv} \operatorname{tg}\theta} \quad (13)$$

Assim é possível achar a partir da Equação (13), a deformação necessária a ser aplicada sobre as duas molas para que a estrutura "X" assuma sua geometria pré-tensionada desejada, em equilíbrio estático.

Outro caminho para a solução de  $u_{Cv}$  é levar em consideração o que já foi dito no tópico 4, em parâmetros adotados. A tensão recomendada para garantir a recuperação da liga sem tensões residuais é de 190 MPa. Onde garantimos que a LMF não se deformará plasticamente, atingindo uma deformação de aproximadamente 4%.

Onde:

$$F_{Ch} = F_{Cv} \operatorname{tg}\theta \quad (4)$$

$$F_{Cv} = K_{Cv} u_{Cv} \quad (5)$$

$$\sigma_{Ch} = \frac{F_{Ch}}{A_{Ch}} \rightarrow F_{Ch} = \sigma_{Ch} A_{Ch} \quad (6)$$

$$\text{Logo: } \sigma_{Ch} A_{Ch} = K_{Cv} u_{Cv} \operatorname{tg}\theta \rightarrow u_{Ch} = \frac{\sigma_{Ch} A_{Ch}}{K_{Cv} \operatorname{tg}\theta} \quad (14)$$

A partir da Equação (14) e sabendo todos os valores de tensão nos cabos da liga ( $\sigma_{Ch}$ ), área da seção transversal dos cabos ( $A_{Ch}$ ), constante de elasticidade da mola ( $K_{Cv}$ ) e ângulo ( $\theta$ ) é possível encontrar a deformação na mola ( $u_{Cv}$ ) necessária para alcançar a pré-tensão ideal da estrutura.

## 5.2 ANÁLISE DINÂMICA DA ESTRUTURA “X”

### 5.2.1 FASES DO ESTUDO DINÂMICO

Na parte do estudo dinâmico quatro etapas serão realizadas. A modelagem física, modelagem matemática, solução da modelagem matemática e interpretação dos resultados obtidos.

Na modelagem física o objetivo é representar esquematicamente todas as características importantes do sistema estudado. Na modelagem matemática, são formuladas as equações diferenciais referentes ao modelo matemático do sistema. Utilizam-se técnicas apresentadas em dinâmica dos corpos rígidos como, segunda lei de Newton, princípio da conservação de energia, etc. A etapa de solução da modelagem matemática, comumente feita por software, é puramente matemática e se resume em resolver as equações diferenciais que constituem a modelagem matemática. Na interpretação dos resultados ocorre a análise dos resultados obtidos, a partir do que se pode esperar do problema com relação a outras fontes.

## 5.2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E NUMÉRICA

O comportamento de uma estrutura com vários graus de liberdade, do ponto de vista matemático, face a uma solicitação dinâmica, será descrito pela equação fundamental da dinâmica:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (15)$$

A caracterização do comportamento dinâmico da estrutura requer definição de três matrizes: matriz de rigidez  $[K]$ , matriz de massa  $[M]$  e amortecimento  $[C]$ . O vetor  $\{u\}$  é o vetor de deslocamento, representando o deslocamento dos vários graus de liberdade da estrutura em função do tempo, onde  $\{\dot{u}\}$  representa a primeira derivada do vetor de deslocamento, que é tempo e velocidade de reprodução com vários graus de liberdade estrutural uma função do tempo e reproduz a velocidade ao nível dos vários graus de liberdade da estrutura em função do tempo,  $\{\ddot{u}\}$  representa a segunda derivada do vetor de deslocamento função do tempo e reproduzir a aceleração do nó em função do tempo. Por fim, o vetor  $\{F\}$  que indica a solicitação dinâmica pela qual a estrutura foi submetida (Rodrigues, 2014).

A matriz de rigidez da estrutura pode ser definida como matriz  $[K]$ , e seu termo genérico  $[k_{ij}]$  representa a força restauradora elástica gerada na direção  $i$  devido ao deslocamento na direção  $j$ . Semelhante à matriz de rigidez, a matriz de massa é matriz  $[M]$ , em que seu termo genérico  $[m_{ij}]$  representa os elementos da matriz de massa, localizados na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna. A matriz de amortecimento pode ser definida de forma semelhante à matriz de massa  $[C]$ , mas na maioria dos casos, não precisa ser claramente definida. No entanto, quando necessário, o coeficiente de amortecimento de Rayleigh pode ser usado para definir a matriz de amortecimento em proporção à matriz de rigidez e à matriz de massa. Entretanto, não há necessidade de seguir com a definição da matriz de amortecimento no escopo deste trabalho (Rodrigues, 2014).

A matriz de amortecimento é irrelevante para o comportamento dinâmico das estruturas tensíntegras. Oppenheim e Williams (2001) estudaram o comportamento dinâmico de algumas estruturas de tensegridade básicas e concluíram

que o efeito de amortecimento natural sobre os elementos estruturais integrais de tensão é pequeno devido a mecanismos infinitesimais.

Há diversos trabalhos que se dividem pela análise linear e não linear de estruturas de tensegridade. Estruturas de tensegridade são particularmente leves e têm grande flexibilidade, portanto são geometricamente não lineares. Nas últimas décadas muitos estudos foram realizados, e um grande número de modelos dinâmicos lineares e não lineares característicos de estruturas tensíntegras foram obtidos. No entanto, estudos anteriores mostraram que equações lineares de movimento caracterizam efetivamente o comportamento dinâmico dessas estruturas.

Logo trabalharemos com a equação de movimento linear para caracterizar o comportamento dinâmico:

$$[M] \{\ddot{u}\} + [K_T]\{u\} = \{F\} \quad (16)$$

Onde  $[K_T]$  representa a matriz de rigidez tangencial, que pode ser decomposta em uma matriz de rigidez linear  $[K_E]$ , que é eficaz para analisar pequenas estruturas de deslocamento, enquanto a matriz geométrica  $[K_G]$  é causada por pré-esforço (N. Bel Hadj e Smith, 2009). Porém, neste trabalho, a estrutura em "X" será caracterizada dinamicamente sob a hipótese de pequeno deslocamento, portanto, a pré-tensão na estrutura tem pouco a ver com a definição da matriz de rigidez da estrutura. (Rodrigues, 2014).

De acordo com algumas variáveis, a caracterização dinâmica da estrutura "X" pode ser realizada de forma geral pelas características da estrutura, sendo que, algumas delas estão ilustradas na Figura 20.

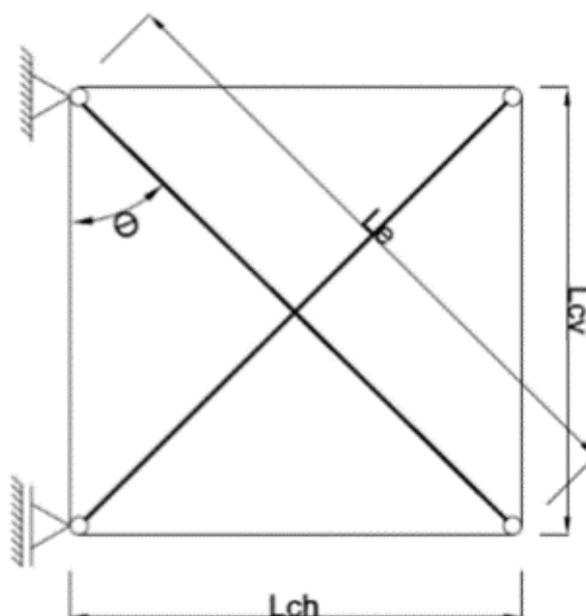


Figura 20 - ESTRUTURA EM "X" ANALISADA NO ESTUDO DINÂMICO

As variáveis necessárias à completa caracterização dinâmica da estrutura em "X" são:

- $L_e$ , comprimento das escoras da estrutura;
- $L_{cv}$ , comprimento dos cabos verticais;
- $L_{ch}$ , comprimento dos cabos horizontais;
- $\theta$  ângulo formado entre uma escora e um cabo horizontal;
- $EA_c$ , rigidez axial dos cabos;
- $EA_e$ , rigidez axial das escoras;
- $m$ , massa dos elementos da estrutura;

O termo  $EA_c$  representa de maneira genérica, a rigidez dos cabos da estrutura, independentemente do momento (estágio inicial ou final). A devida importância ao valor de  $E$  será dada quando for feito o cálculo. Já que para as duas situações estudadas, temos que o valor de  $E$  é diferente, devido a mudança de fase nos cabos de LMF.

Considera-se que o comprimento dos dois cabos verticais ou dos dois cabos horizontais são iguais entre si, ou seja, vai se desconsiderar configurações em que os dois cabos paralelos têm comprimentos diferentes.

Podemos reduzir o número de variáveis associadas à estrutura analisada, ou

seja:

$$L_{Ch} = L_e \sin(\theta) \quad (1)$$

$$L_{Cv} = L_e \cos(\theta) \quad (2)$$

### 5.2.2.1 MATRIZ DE RIGIDEZ

A matriz de rigidez de uma estrutura pode ser definida como a matriz  $[K]$ , cujo termo genérico  $[k_{ij}]$  representa o elemento da matriz de rigidez, localizado na linha  $i$  e coluna  $j$ . Assim, através da aplicação do Método dos Deslocamentos e considerando os graus de liberdade apresentados na Figura 21, podemos construir a matriz de rigidez da estrutura em "X". (Rodrigues, 2014).

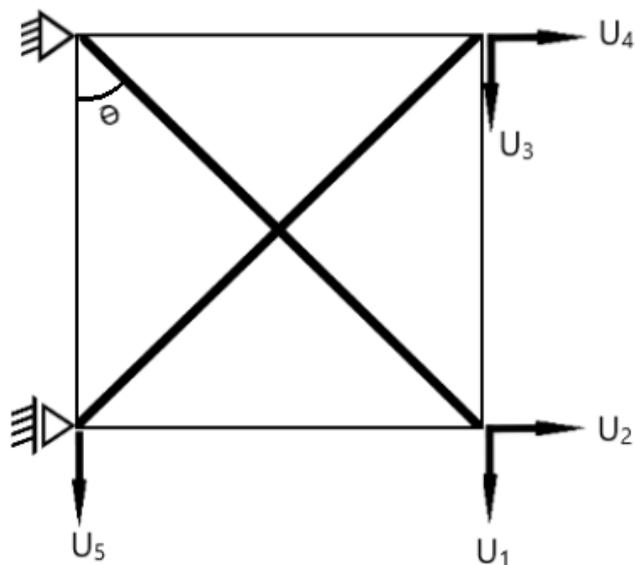


Figura 21- OS 5 GRAUS DE LIBERDADE CONSIDERADOS NO CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DA ESTRUTURA EM "X"  
Fonte: Adaptado Rodrigues (2014)

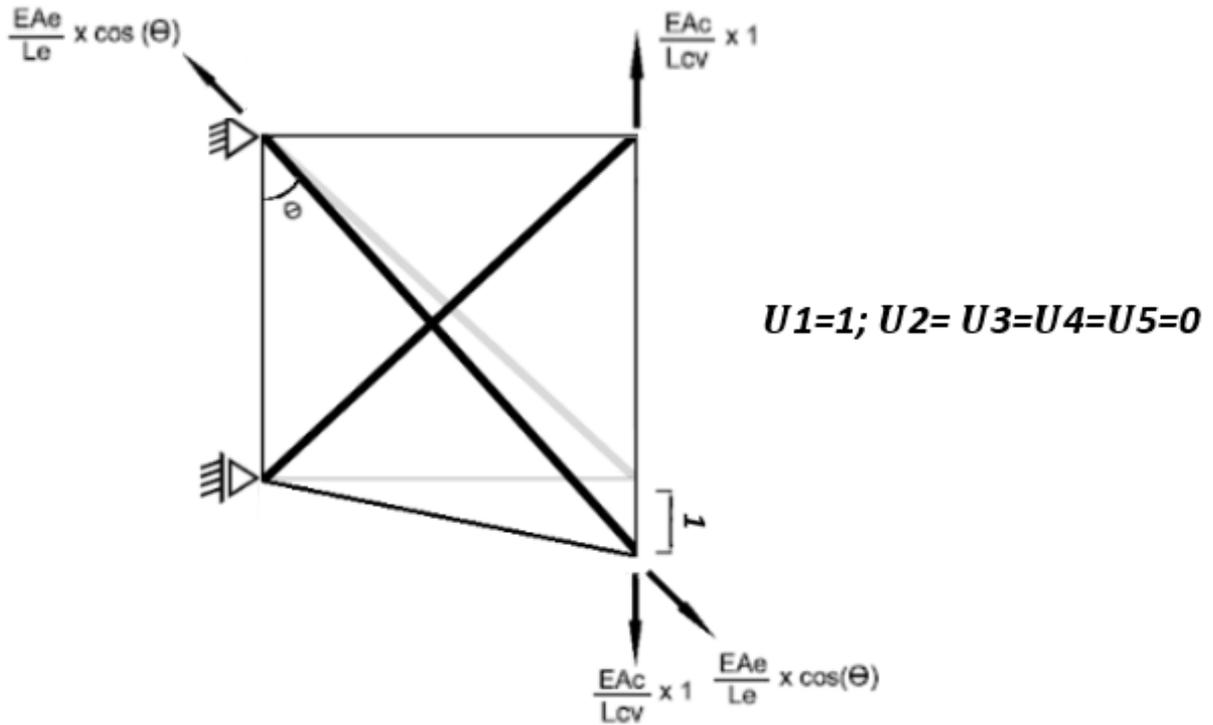


Figura 22 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS À ESTRUTURA EM "X" ANALISADA, PARA O PRIMEIRO GRAU DE LIBERDADE  
Fonte: Adaptado Rodrigues (2014)

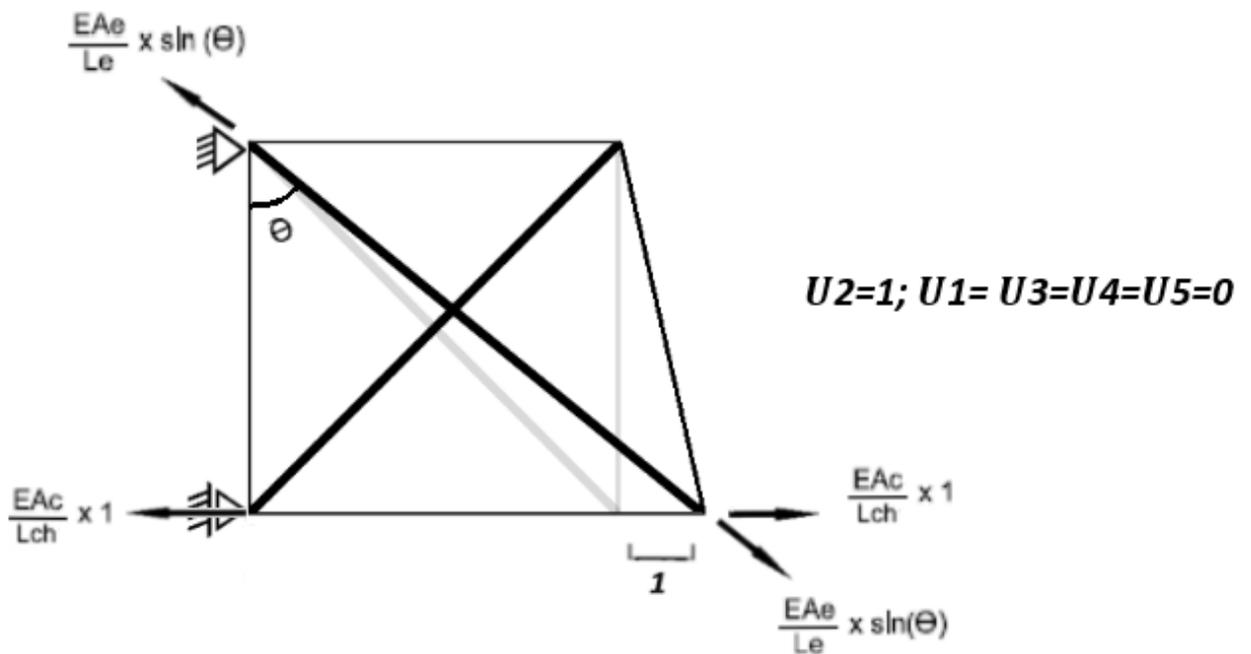


Figura 23 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS À ESTRUTURA EM "X" ANALISADA, PARA O SEGUNDO GRAU DE LIBERDADE  
Fonte: Adaptado Rodrigues (2014)

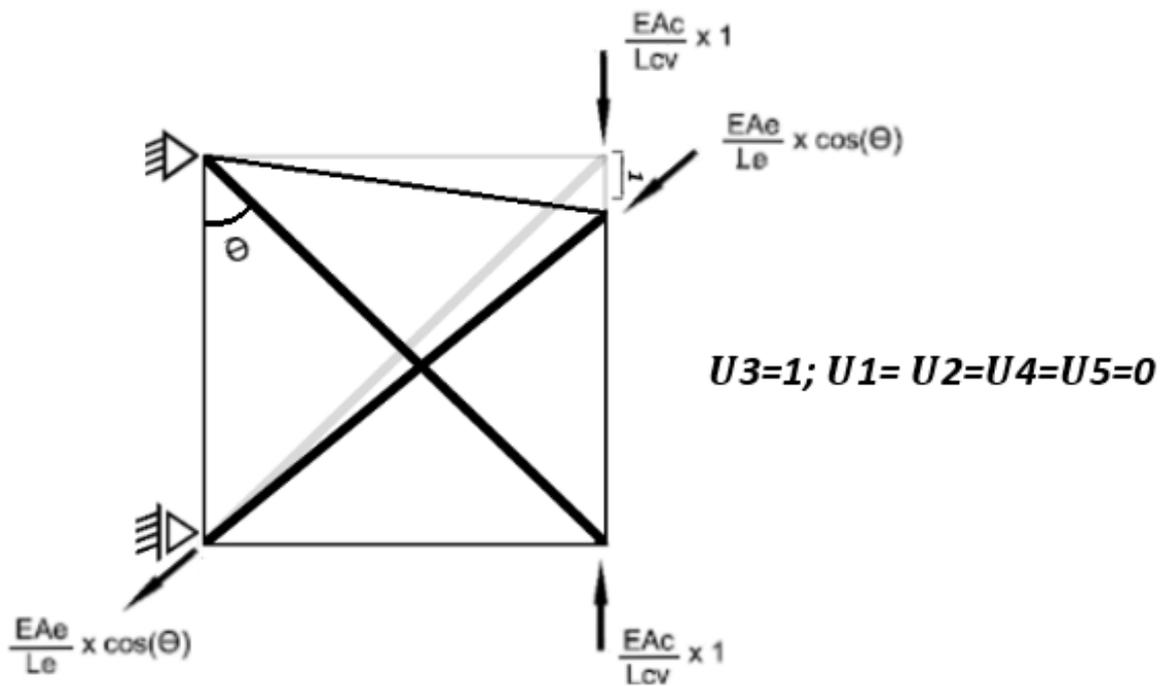


Figura 24 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS À ESTRUTURA EM "X" ANALISADA, PARA O TERCEIRO GRAU DE LIBERDADE  
Fonte: Adaptado Rodrigues (2014)

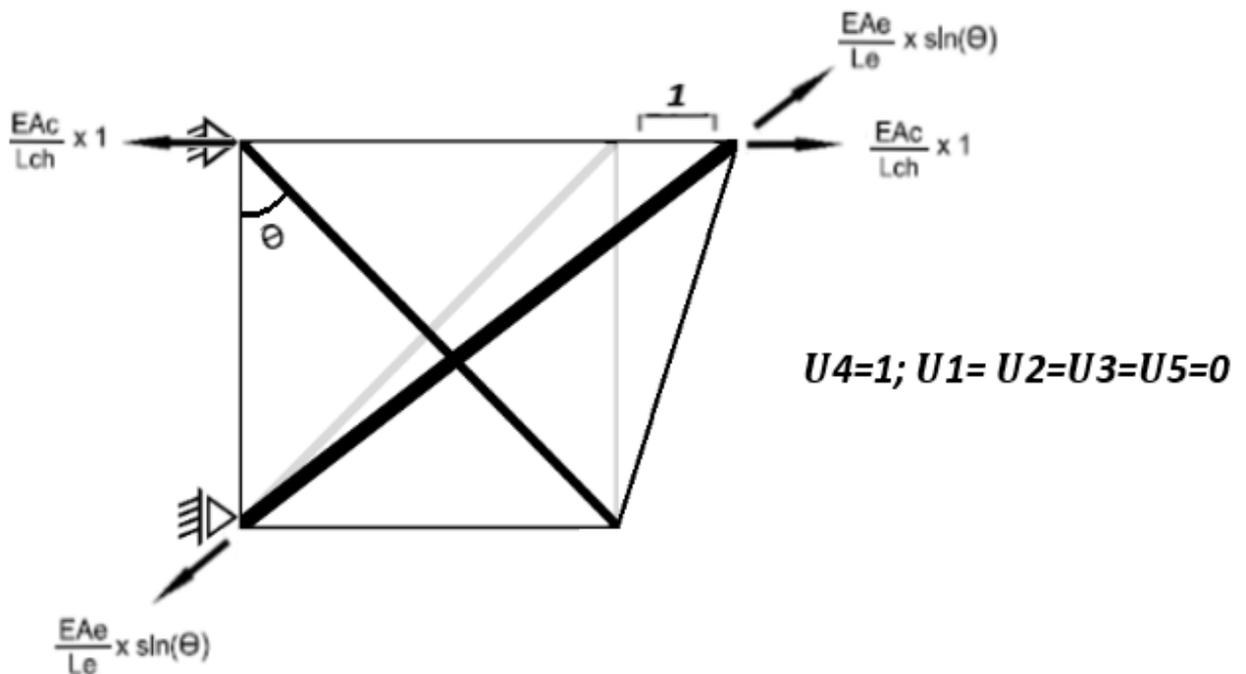


Figura 25 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS À ESTRUTURA EM "X" ANALISADA, PARA O QUARTO GRAU DE LIBERDADE  
Fonte: Adaptado Rodrigues (2014)

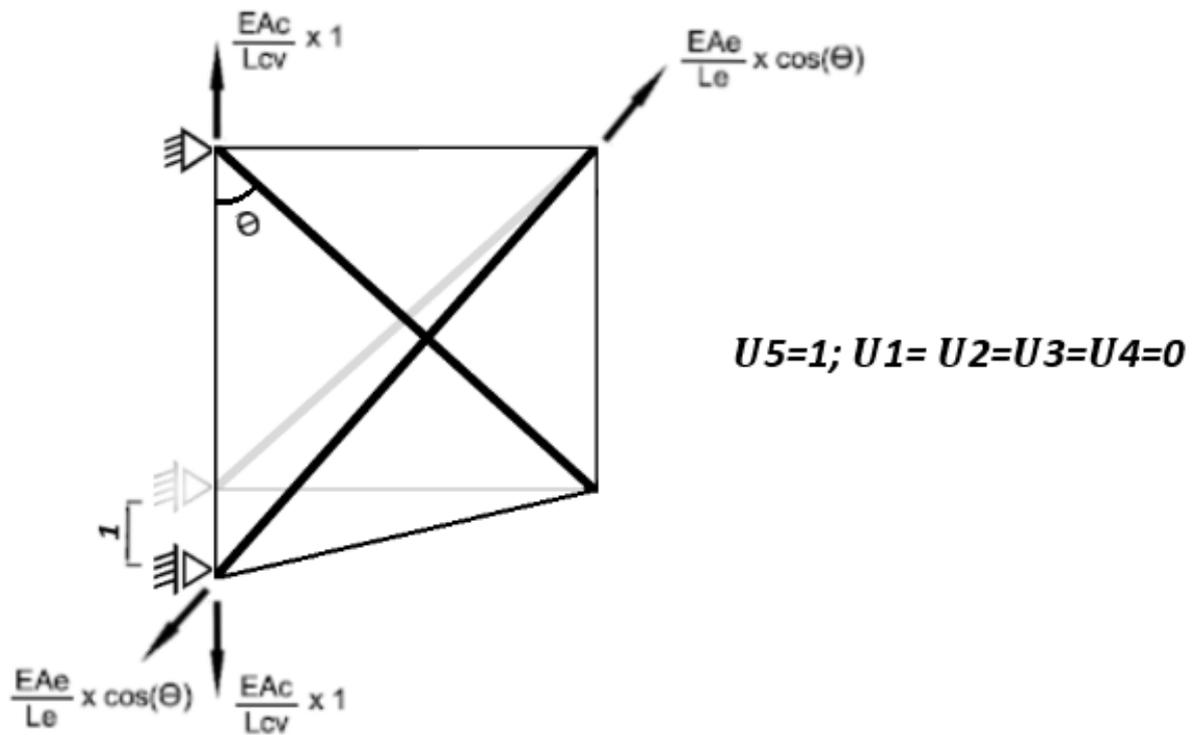


Figura 26 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS À ESTRUTURA EM "X" ANALISADA, PARA O QUINTO GRAU DE LIBERDADE  
Fonte: Adaptado Rodrigues (2014)

Através da análise genérica esquematizada nas Figuras 22, 23, 24, 25 e 26 podemos definir a matriz de rigidez em função das variáveis evidenciadas na matriz (17):

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA_e}{L_e} \cos^2(\theta) + \frac{EA_c}{L_{cv}} & \frac{EA_e}{L_e} \sin(\theta) \cos(\theta) & -\frac{EA_c}{L_{cv}} & 0 & 0 \\ \frac{EA_e}{L_e} \sin(\theta) \cos(\theta) & \frac{EA_e}{L_e} \sin^2(\theta) + \frac{EA_c}{L_{ch}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_c}{L_{cv}} & 0 & \frac{EA_e}{L_e} \cos^2(\theta) + \frac{EA_c}{L_{cv}} & -\frac{EA_e}{L_e} \sin(\theta) \cos(\theta) & -\frac{EA_e}{L_e} \cos^2(\theta) \\ 0 & 0 & -\frac{EA_e}{L_e} \sin(\theta) \cos(\theta) & \frac{EA_e}{L_e} \sin^2(\theta) + \frac{EA_c}{L_{ch}} & \frac{EA_e}{L_e} \sin(\theta) \cos(\theta) \\ 0 & 0 & -\frac{EA_e}{L_e} \cos^2(\theta) & \frac{EA_e}{L_e} \sin(\theta) \cos(\theta) & \frac{EA_e}{L_e} \cos^2(\theta) + \frac{EA_c}{L_{cv}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

### 5.2.2.2 MATRIZ DE MASSA

Na matriz de massa da estrutura em “X” considerou-se que os cabos seriam elementos sem massa, uma vez que a reduzida área da sua secção transversal faz com que a sua massa seja muito reduzida e que tenha pouco importância na definição da matriz de massa. Assim, considerou-se apenas a massa distribuída nas escoras, o que resulta em uma matriz de massa consistente.

Logo por se tratar de um sistema de massa distribuída podemos usar a seguinte expressão:

$$u(x,t) = \Psi_1(x) u_1(t) \quad (18)$$

Trabalhando com a expressão anterior podemos derivar  $u(x,t)$  em relação ao tempo e aplicar uma aceleração unitária na direção  $u_1$ , o que nos dá a seguinte expressão abaixo:

$$\ddot{u}(x,t) = \Psi_1(x) \ddot{u}_1(t) \quad (19)$$

Novamente, realizando algumas alterações em cima da expressão obtida, multiplicamos ambos os lados da equação para obtermos as forças de inércia da estrutura. Que serão dadas pela seguinte expressão:

$$m\ddot{u}(x,t) = m \Psi_1(x) \ddot{u}_1(t) \quad (20)$$

Nesse ponto é usado o Princípio dos Trabalhos Virtuais. Pois, quando  $\ddot{u}_1$  igual a 1 ( $\ddot{u}_1 = 1$ ) desenvolve-se uma força de inércia na direção  $u_2$ , essa força pode ser obtida impondo-se um deslocamento virtual unitário segundo a direção  $u_2$  que, irá corresponder a deformada  $\Psi_2(x)$  (Raimundo Delgado et al., 2000). Teremos como o resultado a seguinte expressão:

$$m_{21} = \int_0^l m \Psi_1(x) \Psi_2(x) dx \quad (21)$$

Finalmente para encontrarmos a matriz de massa basta aplicarmos uma aceleração unitária para todos os graus de liberdade considerados na análise da estrutura, conforme a Figura 27. Logo a matriz de massa vai estar em função de  $m$ , e em função do ângulo  $\theta$ .

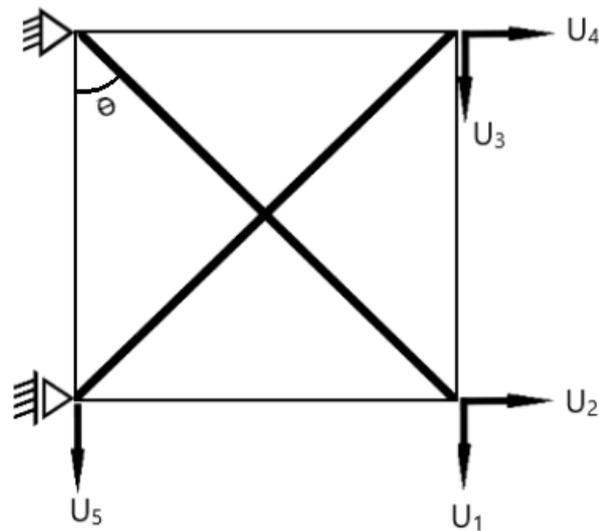


Figura 27 - OS 5 GRAUS DE LIBERDADE CONSIDERADOS NO CÁLCULO DA MATRIZ DE MASSA DA ESTRUTURA EM "X"  
Fonte: Rodrigues (2014)

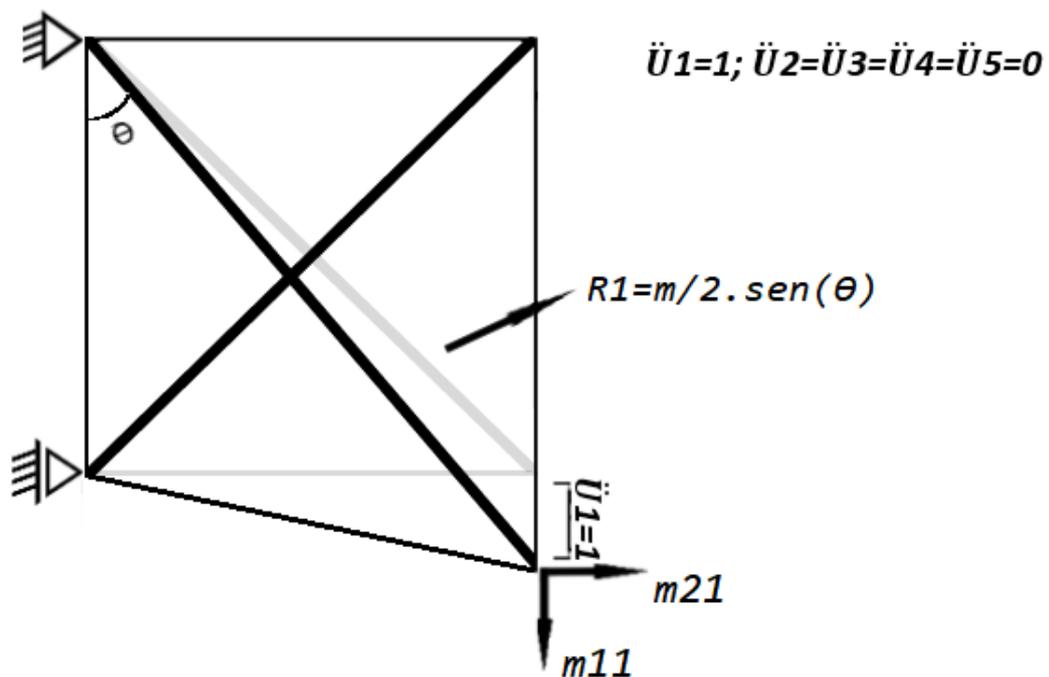


Figura 28 - MÉTODO APLICADO NO CÁLCULO DA MATRIZ DE MASSA DA ESTRUTURA EM "X", PARA O PRIMEIRO GRAU DE LIBERDADE  
Fonte: Adaptado Rodrigues (2014)

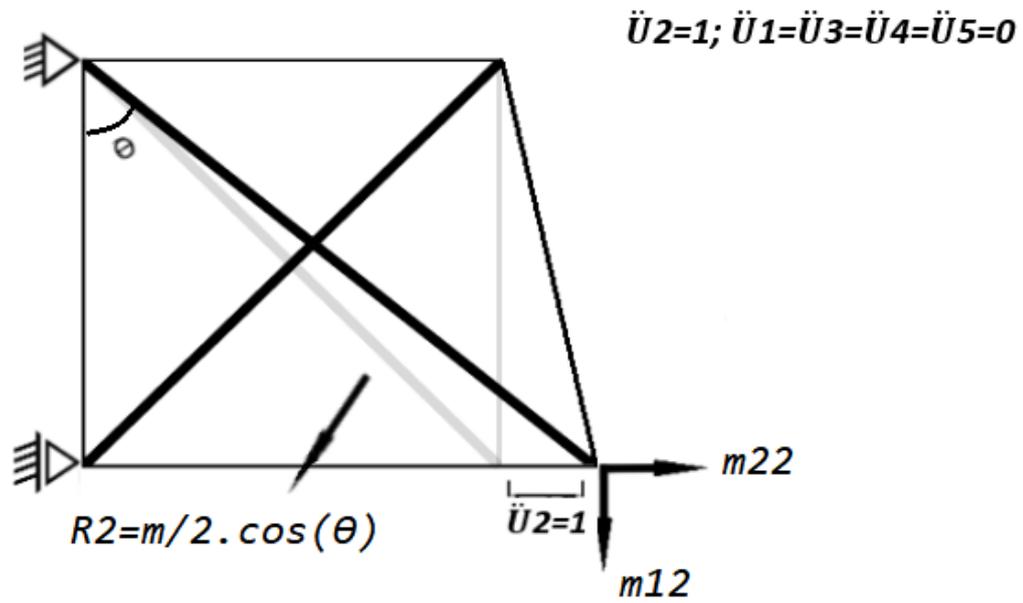


Figura 29 - MÉTODO APLICADO NO CÁLCULO DA MATRIZ DE MASSA DA ESTRUTURA EM "X", PARA O SEGUNDO GRAU DE LIBERDADE  
Fonte: Adaptado Rodrigues (2014)

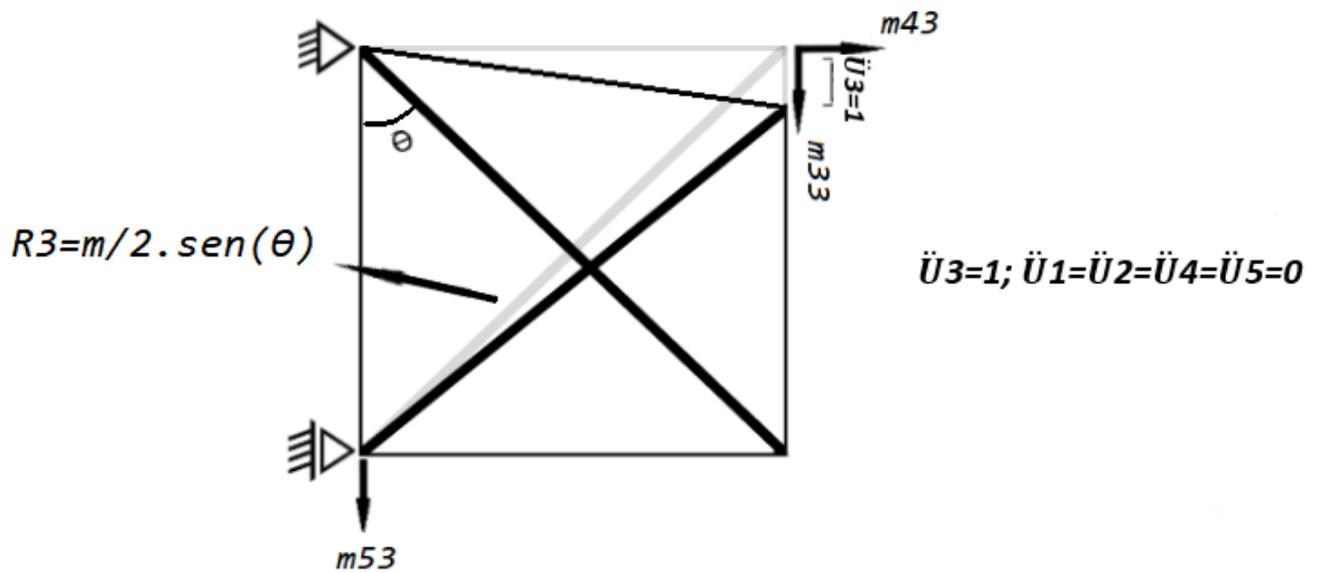


Figura 30 - MÉTODO APLICADO NO CÁLCULO DA MATRIZ DE MASSA DA ESTRUTURA EM "X", PARA O TERCEIRO GRAU DE LIBERDADE  
Fonte: Adaptado Rodrigues (2014)

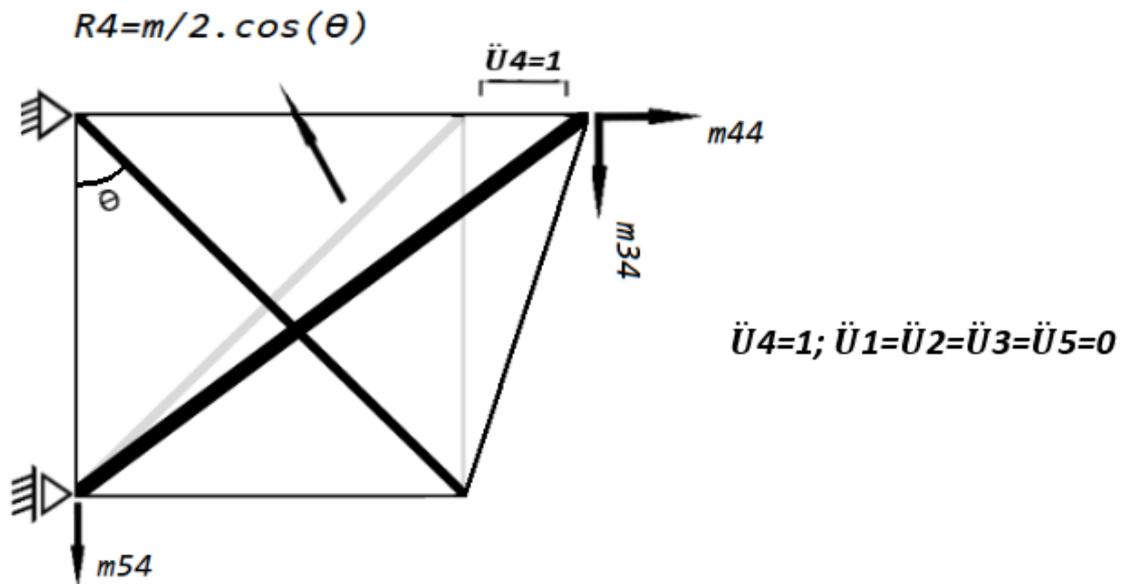


Figura 31 - MÉTODO APLICADO NO CÁLCULO DA MATRIZ DE MASSA DA ESTRUTURA EM "X", PARA O QUARTO GRAU DE LIBERDADE  
Fonte: Adaptado Rodrigues (2014)

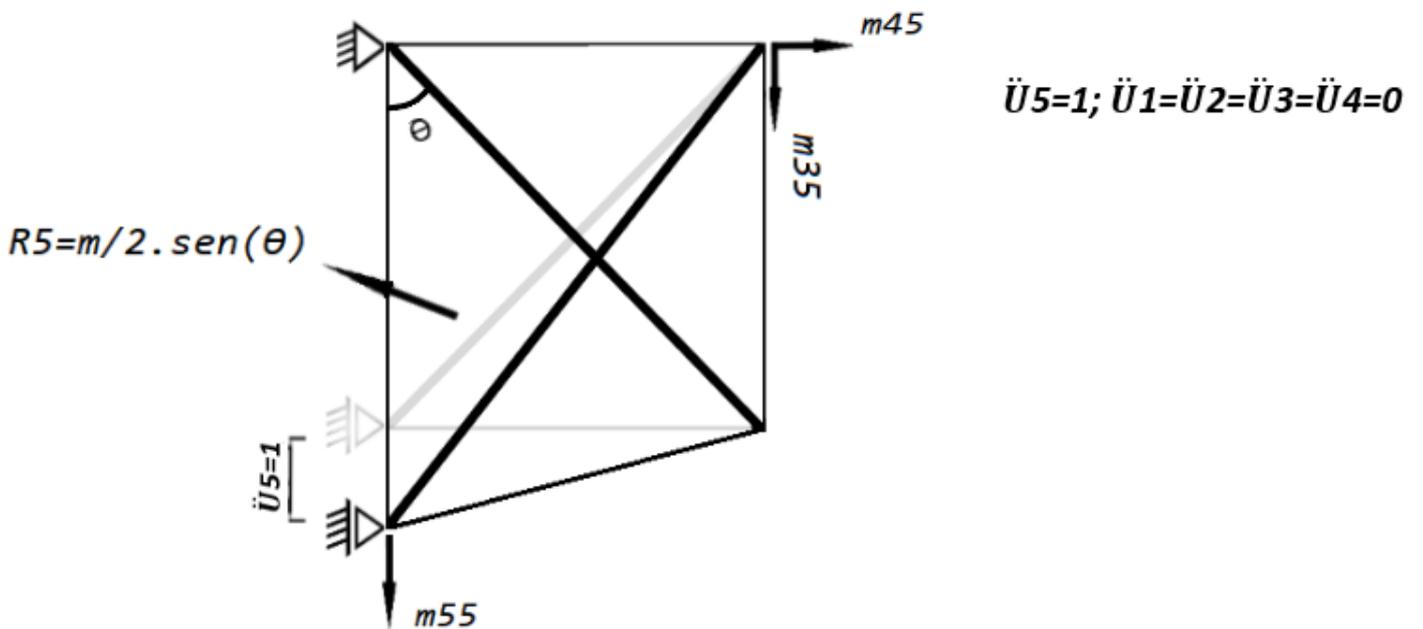


Figura 32 - MÉTODO APLICADO NO CÁLCULO DA MATRIZ DE MASSA DA ESTRUTURA EM "X", PARA O QUARTO GRAU DE LIBERDADE  
Fonte: Adaptado Rodrigues (2014)

Aplicando o método representado nas Figuras 28, 29, 30, 31 e 32 pode-se calcular a matriz de massa genérica da estrutura em "X":

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{m}{3} \text{sen}^2(\theta) & -\frac{m}{3} \text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{m}{3} \text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta) & \frac{m}{3} \text{cos}^2(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{3} \text{sen}^2(\theta) & \frac{m}{3} \text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta) & \frac{m}{6} \text{sen}^2(\theta) \\ 0 & 0 & \frac{m}{3} \text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta) & \frac{m}{3} \text{cos}^2(\theta) & \frac{m}{6} \text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta) \\ 0 & 0 & \frac{m}{6} \text{sen}^2(\theta) & \frac{m}{6} \text{sen}(\theta)\text{cos}(\theta) & \frac{m}{3} \text{sen}^2(\theta) \end{bmatrix}$$

(22)

### 5.2.2.3 ANÁLISE MODAL

Com as matrizes de massa e rigidez definidas, pode-se calcular os diferentes modos de vibração da estrutura e a frequência de vibração associada a cada modo de vibração.

Através da resolução da equação que define o problema de autovetores e autovalores (Equação 23), as frequências e os modos de vibração são obtidos. O determinante do sistema deve ser nulo, caso exista uma solução além da não nula, ou seja:

$$([K] - \omega^2 [M]) \varphi = 0 \quad (23)$$

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (24)$$

Para uma estrutura com n graus de liberdade, a condição anterior conduz a uma equação polinomial de grau n, denominada de equação característica. Sendo que as n soluções desta equação ( $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ ) representam as frequências dos seus respectivos n modos de vibração, associadas a um vetor próprio  $\varphi_n$  que representa o

modo de vibração da estrutura. A determinação dos autovalores e dos autovetores é feita através de métodos numéricos, onde se define a matriz dinâmica  $[D]$  (Rodrigues, 2014).

$$[D] = [K]^{-1} [M] \quad (25)$$

As frequências próprias de vibração do sistema e seus respectivos modos de vibração são dados da seguinte forma:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\text{Eigenvalues}([D])}} \quad (26)$$

$$\varphi_n = \text{Eigenvectors}([D]) \quad (27)$$

Trata-se agora de encontrar os autovalores e autovetores, onde para cada autovetor está associado um autovalor correspondente.

Essa tarefa demanda demasiado esforço repetitivo de cálculos, e será realizada em um ambiente computacional, o MATLAB. Para isso, uma rotina lógica na linguagem do MATLAB foi criada utilizando as matrizes de massa e rigidez vistas nos últimos tópicos. As rotinas para a estrutura no estágio inicial e final são apresentadas nos anexos A e B respectivamente.

Dessa forma, são encontrados os autovalores, que são as frequências naturais do sistema, para os dois formatos distintos da estrutura alterando ângulo  $\theta$  (theta) da mesma. Assim tem-se as três primeiras frequências naturais para os dois formatos (estágios da estrutura) apresentadas na Tabela 3.

**Tabela 3 – TRÊS PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS PELO MODELO NUMÉRICO DOS DOIS FORMATOS DA ESTRUTURA “X”**

Frequências naturais	Estágio inicial	Estágio final	Variação %
1 <sup>o</sup>	2.318 Hz	3.043 Hz	31,27 %
2 <sup>o</sup>	3.307 Hz	4.030 Hz	21,86 %
3 <sup>o</sup>	20.063 Hz	17.346 Hz	- 13,54 %

### 5.2.3 ANÁLISE DA ESTRUTURA “X” POR MEF - ANSYS

As estruturas projetadas são geralmente modeladas matematicamente recorrendo a um programa de cálculo matemático, geralmente baseados em métodos numéricos como o método dos elementos finitos (MEF). A modelação matemática de estruturas permite aos engenheiros o esclarecimento de diversas propriedades e comportamentos da estrutura face a diferentes tipos de solicitações tanto estáticas como dinâmicas.

Neste trabalho, desenvolveu-se um modelo numérico em elementos finitos do modelo à escala reduzida proposto anteriormente utilizando o software de cálculo automático ANSYS.

Para verdadeiramente caracterizar as duas situações distintas na qual a estrutura se encontrará e validar os resultados obtidos, criaram-se dois modelos distintos: um em que a estrutura apresenta a geometria inicial (estrutura mais comprida e estreita), e outro modelo com a geometria final (estrutura menos comprida e mais larga).

As propriedades físicas da estrutura são, de forma simplificada, iguais em cada um dos modelos, no entanto, para as propriedades mecânicas já não é verdade. Nomeadamente para o módulo de elasticidade das LMF que, como se viu no capítulo 4, varia conforme as ligas estão na fase martensítica ou na fase austenítica. As propriedades físicas e mecânicas introduzidas no programa podem ser consultadas nas Tabelas 4 e 5.

**Tabela 4 – PROPRIEDADES FÍSICAS RELEVANTES DOS ELEMENTOS DA ESTRUTURA**

<b>Propriedades físicas dos elementos da estrutura</b>	
Diâmetro da liga de memória de forma	D = 0,375 mm
Dimensões da secção da haste	b = 15 mm; h = 5 mm
Densidade da liga de memória de forma	6450 Kg/m <sup>3</sup>
Densidade da haste (Aço estrutural A-36)	7850 Kg/m <sup>3</sup>

Tabela 5 – PROPRIEDADES MECÂNICAS RELEVANTES DOS ELEMENTOS DA ESTRUTURA

<b>Propriedades mecânicas relevantes dos elementos da estrutura</b>			
Geometria Inicial		Geometria Final	
Módulo de elasticidade das LMF	$E = 67,5 \text{ GPa}$	Módulo de elasticidade das LMF	$E = 32 \text{ GPa}$
Tensão de cedência das ligas LMF	$\sigma = 500 \text{ MPa}$	Tensão de cedência das ligas LMF	$\sigma = 500 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson das LMF	$\nu = 0,33$	Coefficiente de Poisson das LMF	$\nu = 0,33$
Módulo de elasticidade da haste	$E = 200 \text{ GPa}$	Módulo de elasticidade da haste	$E = 200 \text{ GPa}$
Coefficiente de Poisson da haste	$\nu = 0,32$	Coefficiente de Poisson da haste	$\nu = 0,32$
Constante elástica da mola	$K = 35.000 \text{ N/m}$	Constante elástica da mola	$K = 35.000 \text{ N/m}$

Foram escolhidas molas helicoidais de tração com constante elástica  $K = 35.000 \text{ N/m}$ . Foi utilizado como critério para a escolha da mola, uma deformação entre 15 e 20 mm na mesma para se atingir a pré-tensão ideal na hora da montagem.

E como já falado anteriormente, a partir da Equação (14) e estabelecendo o critério de deformação na mola falado, é possível escolher a constante elástica da mola helicoidal a ser usada e seu deslocamento necessário (19,98 mm) para conferir a estrutura sua pré-tensão ideal.

As molas helicoidais de tração foram simuladas através de elementos "LINK180" com a constante elástica calculada.

### 5.2.3.1 ANSYS

Foi utilizado o software ANSYS, da versão acadêmica. Neste software é possível definir parâmetros como, geometria, malha, condições de contorno, propriedades dos materiais e opções de pós processamento dos cálculos de análise modal.

No software as etapas são definidas sequencialmente e geralmente seguem a sequência de pré-processamento, processamento e pós processamento.

### 5.2.3.2 PRÉ PROCESSAMENTO

O pré-processamento é definido pelo usuário, pois se refere ao tipo de análise desejada, geometria da estrutura, condições de contorno, definição dos materiais e escolha tipo de elemento finito da malha e seu refinamento. A qualidade da malha é um fator importante para se obter um resultado correto.

No entanto, diferente de análises estruturais (cálculo de deslocamentos e tensões), na análise modal não é necessário termos uma malha muito refinada, pois o objetivo são as frequências do modelo. E para se obter as frequências não é necessário um alto refinamento de malha. Logo, esse excesso resultaria em maior custo computacional.

Foi usado o comando “INISTATE” para simular a pré-tensão a qual as ligas estão sujeitas no estágio inicial (Paiva Victor, 2019), e foram usados elementos de viga “BEAM188” para os fios. As molas helicoidais de tração foram simuladas através de elementos “LINK180”, como já foi falado.

As condições de contorno impostas sobre a estrutura foram: Para o nó 1 (inferior esquerdo), deslocamento zero em todas as direções. E para o nó 3 (superior esquerdo), deslocamento livre apenas no eixo y. Conforme a Figura 33.

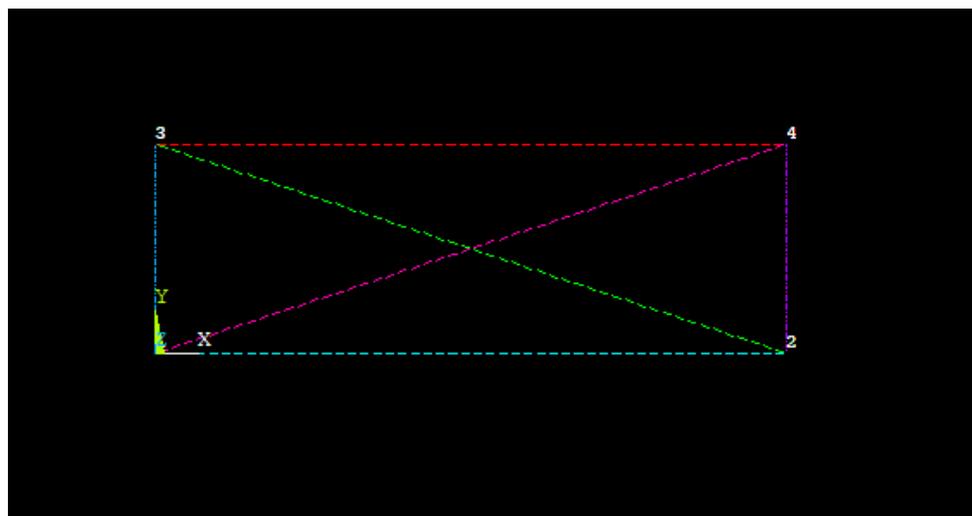


Figura 33 – CONDIÇÕES DE CONTORNO DA ESTRUTURA EM “X” – ANSYS APDL

Para realizarmos a comparação dos resultados obtidos com modelo numérico implementado no MATLAB com os resultados que serão obtidos no ANSYS, foi criada a estrutura em “X” no ANSYS APDL, (Figura 34).

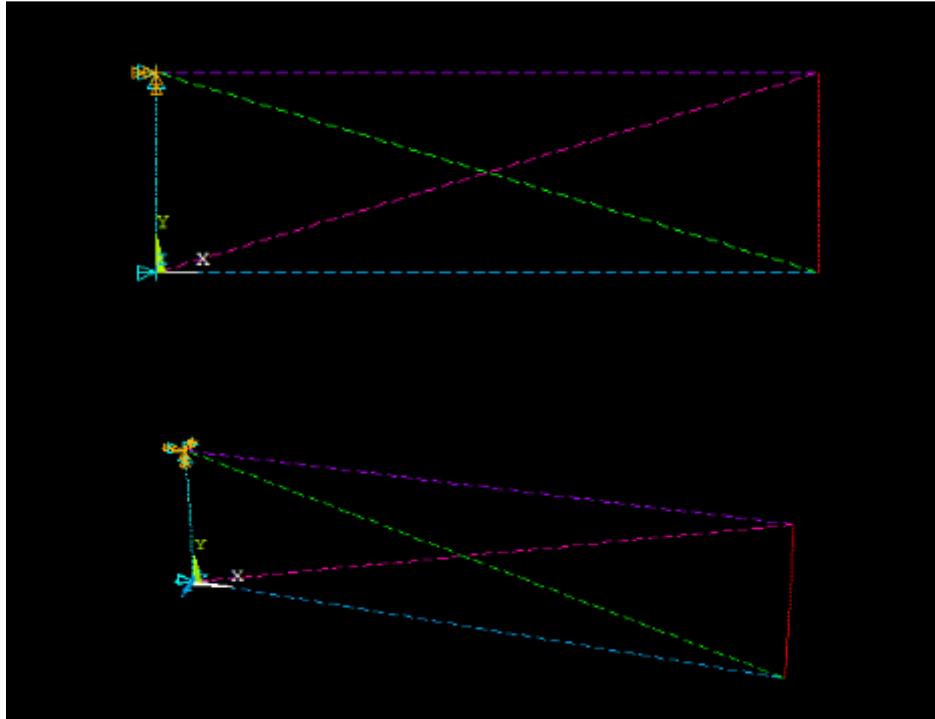


Figura 34 – GEOMETRIA DA ESTRUTURA EM “X” – ANSYS APDL

No ANSYS, foram utilizadas as mesmas condições de contorno avaliadas no modelo numérico do MATLAB, assim como as características geométricas e propriedades mecânicas dos materiais da estrutura “X”.

#### 5.2.3.3 PROCESSAMENTO

O processamento é realizado automaticamente pelo software sem a ação do usuário. No software é implementado o método numérico, destinado a resolução das equações de diferenças finitas. Por ele será definido o tipo de análise que é realizada, o qual implementará numericamente as equações de vibração mecânica, e resolverá para cada tipo de elemento especificado.

#### 5.2.3.4 PÓS PROCESSAMENTO

Aqui ocorre a visualização dos resultados, exibidos detalhadamente na geometria,

mostrando por exemplo gradientes de concentrações de tensão, fluxos de calor e deslocamentos nodais. São apresentados os resultados dos cálculos pretendidos e a representação visual da simulação exibindo a análise modal da estrutura.

Um dos principais objetivos do método numérico é o de conhecer com maior precisão as diferentes configurações modais, assim como, as frequências de vibração associadas a cada uma dessas configurações.

Cabe salientar que não foram feitas análises de tensões na estrutura, pois foi observado que seus elementos são capazes de suportar as tensões exigidas no estágio mais crítico. Se tratando, em questão, do estágio inicial, devido a aplicação da pré-carga de montagem. Para os cabos sob tração a tensão criada com a pré-carga será atendida, de acordo com as informações do fornecedor (190 MPa). Para as escoras sob compressão, como já comentado, estão pouco suscetíveis aos fenômenos de flambagem. E os elementos de fixação são considerados ideais.

O resultado das três primeiras frequências naturais da estrutura “X”, obtidas com o ANSYS, estão na Tabela 6. Juntamente com o cálculo da diferença percentual entre as frequências naturais da estrutura na geometria inicial e final.

**Tabela 6 – TRÊS PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS PELO ANSYS DOS DOIS FORMATOS DA ESTRUTURA “X”**

Frequências naturais	Estágio inicial	Estágio final	Variação %
1º	3,874 Hz	2,398 Hz	-38,1 %
2º	4,571 Hz	3,366 Hz	-26,36 %
3º	5,422 Hz	4,159 Hz	-23,29 %

A diferença vista a partir da Tabela 6 pode ser interpretada da seguinte forma:

Os valores de frequências naturais de uma estrutura estão intimamente ligados à sua rigidez. Para o caso da estrutura em questão, duas variáveis são fundamentais na determinação da rigidez para as duas situações distintas analisadas (estágio inicial e estágio final). Essas duas variáveis que são diferentes nas duas situações distintas, são o módulo de elasticidade da liga com memória de forma, que muda devido a mudança de fase da liga, e a geometria da estrutura como um todo, que muda de uma configuração mais esbelta (estágio inicial) para uma configuração mais larga (estágio final).

A competição entre essas duas grandezas que determinam um aumento ou uma diminuição na rigidez final da estrutura, e conseqüentemente nos valores das suas

frequências naturais de vibração. Sendo assim, a diminuição dos valores de frequência natural com a mudança da estrutura para o estágio final, podem estar ligados a uma consequente diminuição da rigidez da estrutura.

#### 5.2.4 COMPARAÇÃO DAS ANÁLISES DINÂMICAS DA ESTRUTURA EM “X”

Nas Tabelas 7 e 8, podemos enfim comparar os resultados do modelo numérico em MATLAB com os resultados obtidos no ANSYS, ambos para as duas geometrias da estrutura em “X”.

**Tabela 7 - RESULTADOS DAS ANÁLISES DINÂMICAS DA ESTRUTURA “X” NO ESTÁGIO INICIAL**

Frequências naturais	Modelo numérico MATLAB	ANSYS	Diferença [%]
1º	2,318 Hz	3,874 Hz	40,16 %
2º	3,307 Hz	4,571 Hz	27,65 %
3º	20,063 Hz	5,422 Hz	270,02 %

**Tabela 8 - RESULTADOS DAS ANÁLISES DINÂMICAS DA ESTRUTURA “X” NO ESTÁGIO FINAL**

Frequências naturais	Modelo numérico MATLAB	ANSYS	Diferença [%]
1º	3,043 Hz	2,398 Hz	26,89 %
2º	4,030 Hz	3,366 Hz	19,72 %
3º	17,346 Hz	4,159 Hz	317,07 %

O que se pode ver em relação aos dois métodos de análise do problema, é que existe uma grande diferença percentual em relação aos valores encontrados com as duas análises.

As diferenças percentuais encontradas podem estar relacionadas ao fato de que, a análise feita pelo ANSYS é mais precisa e mais completa, quando comparada a análise do modelo numérico usado no MATLAB. Os resultados para as frequências encontradas foram relativamente baixos, sendo que pequenas variações em Hertz refletiram em altas variações percentuais dos valores comparados.

Outra diferença importante é que os valores de frequência dados no modelo numérico aumentam com a mudança da estrutura para o seu estágio final. Diferentemente do que foi visto e falado para a análise do ANSYS. A abordagem feita pelo modelo numérico talvez não equilibre da melhor forma os parâmetros que

competem para a rigidez final da estrutura, o que, conseqüentemente, afeta nos seus resultados finais de frequência natural.

### 5.3 ANÁLISE DINÂMICA DA ESTRUTURA DO TRABALHO

Procurando conhecer as diferentes configurações modais e quais as frequências de vibração associadas a cada uma dessas configurações. Neste tópico desenvolveu-se dois modelos de estrutura, que são a união de três estruturas em “X”. Como comentado no tópico 3.4 “Estrutura tensíntegra do trabalho”. O objetivo aqui é validar a ideia de que a estrutura ativa, proposta no trabalho, é capaz de variar suas frequências próprias mudando sua geometria por atuadores de liga de memória de forma.

Por isso serão analisados dois modelos. Um em que a estrutura apresenta a sua geometria inicial, ou seja, com as ligas à temperatura ambiente (a estrutura estará mais comprida), e outro modelo com a estrutura após o aquecimento das ligas de memória de forma (a estrutura estará mais curta) com conseqüente retração de aproximadamente 4% no comprimento dos cabos da liga.

Nas Figuras 35, 36 e 37 podemos observar as três primeiras configurações modais e as frequências próprias para a estrutura modelada no estágio inicial. E nas Figuras 38, 39 e 40 temos as configurações modais e frequências próprias obtidas para a estrutura no estágio final.

Assim, podemos comparar cada uma das três primeiras formas modais para os dois tipos de geometria. Apesar da estrutura ter mais configurações modais, apenas se apresentam as três primeiras, uma vez que as primeiras acabam sendo as mais relevantes para o estudo que se está a desenvolver.

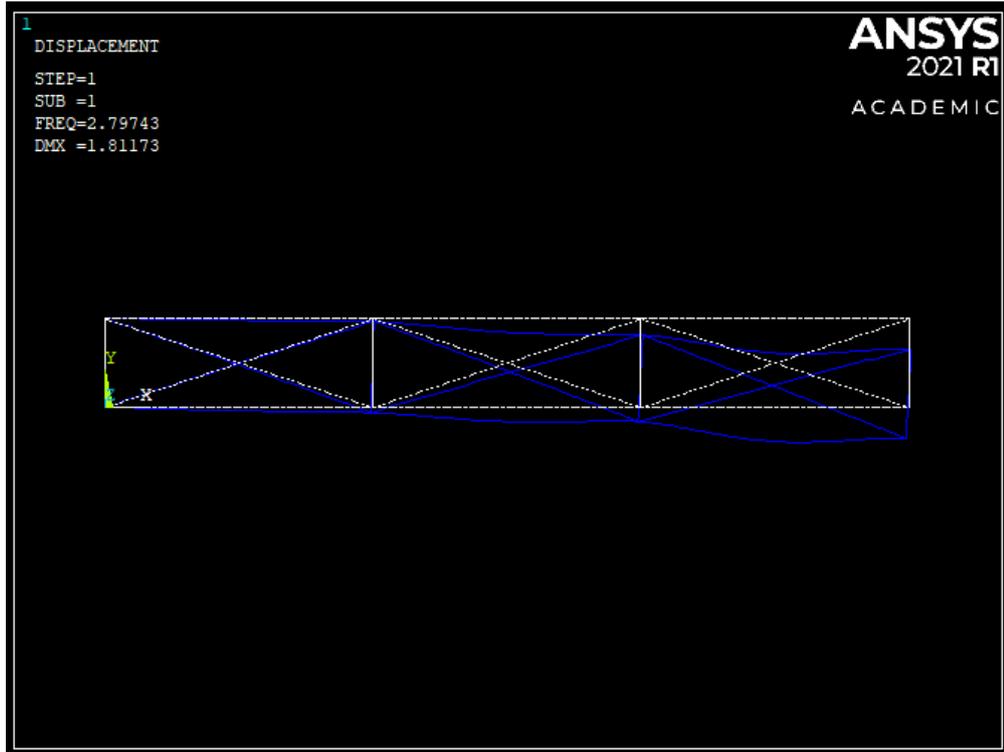


Figura 35 – IMAGEM DO 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA NO ESTÁGIO INICIAL (FREQUÊNCIA NATURAL 2,79 HZ)

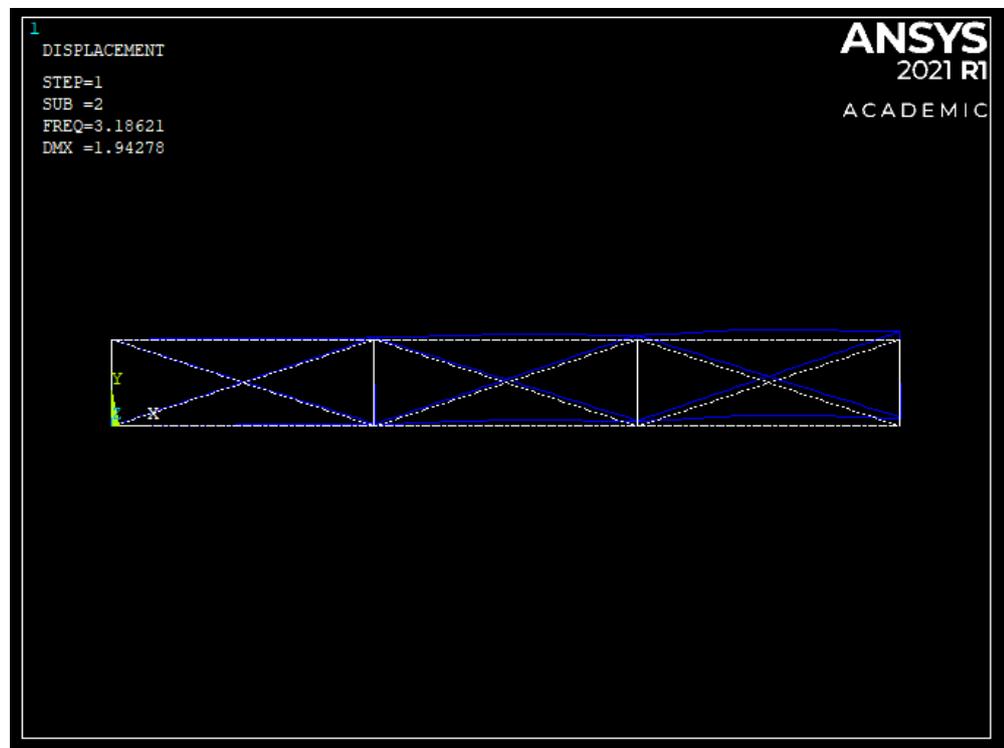


Figura 36 – IMAGEM DO 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA NO ESTÁGIO INICIAL (FREQUÊNCIA NATURAL 3,18 HZ)

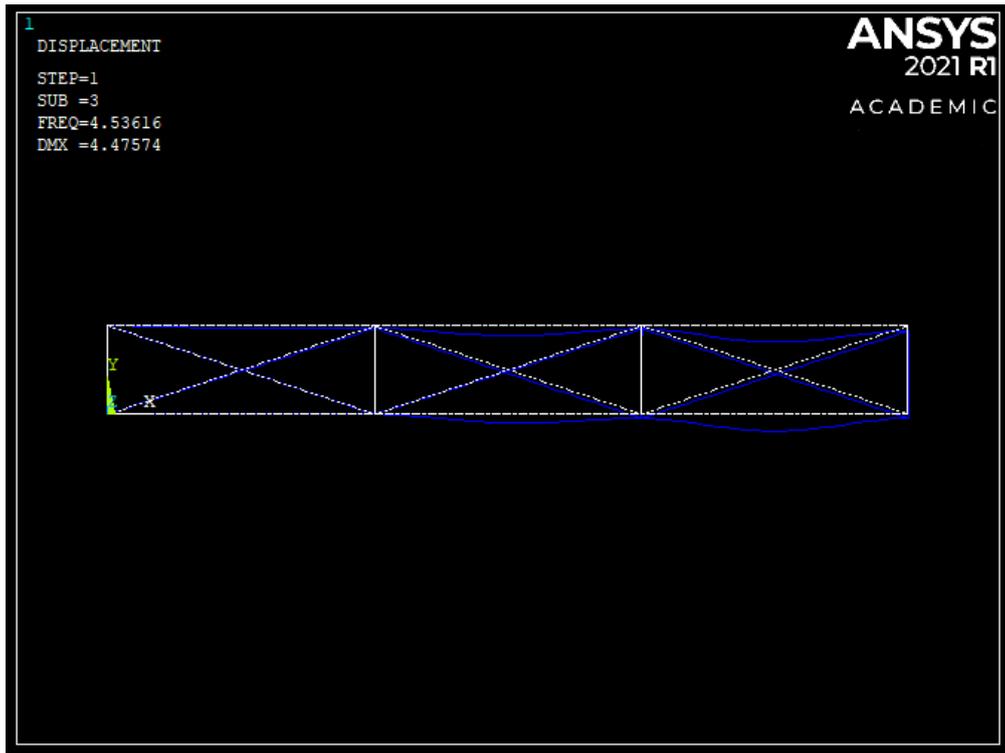


Figura 37 – IMAGEM DO 3º MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA NO ESTÁGIO INICIAL (FREQUÊNCIA NATURAL 4,53 HZ)

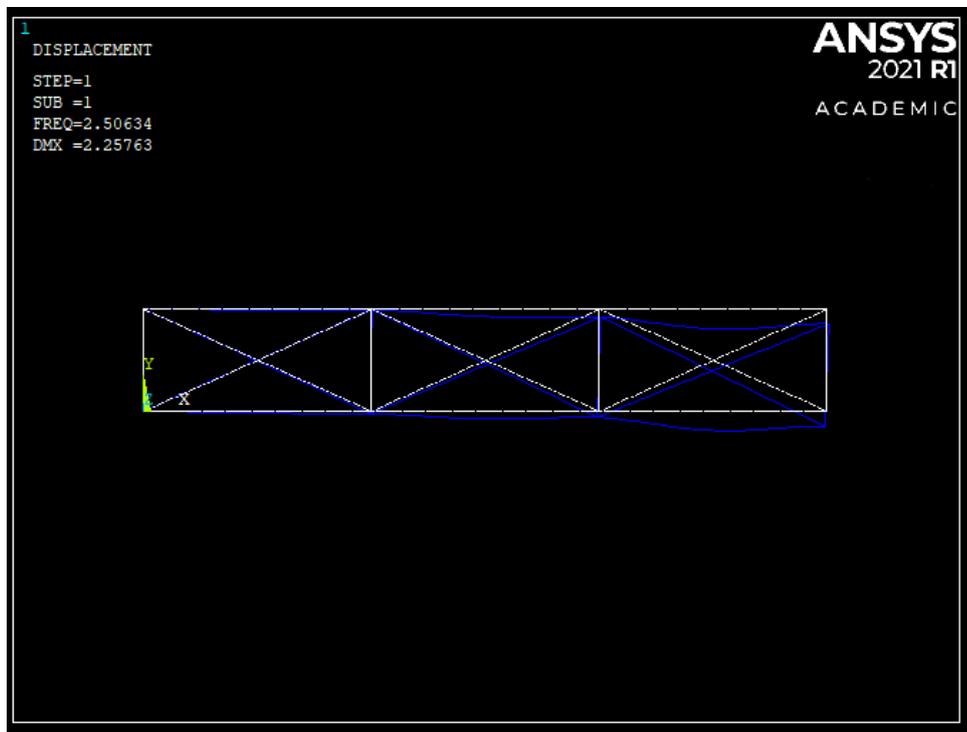


Figura 38 – IMAGEM DO 1º MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA NO ESTÁGIO FINAL (FREQUÊNCIA NATURAL 2,50 HZ)

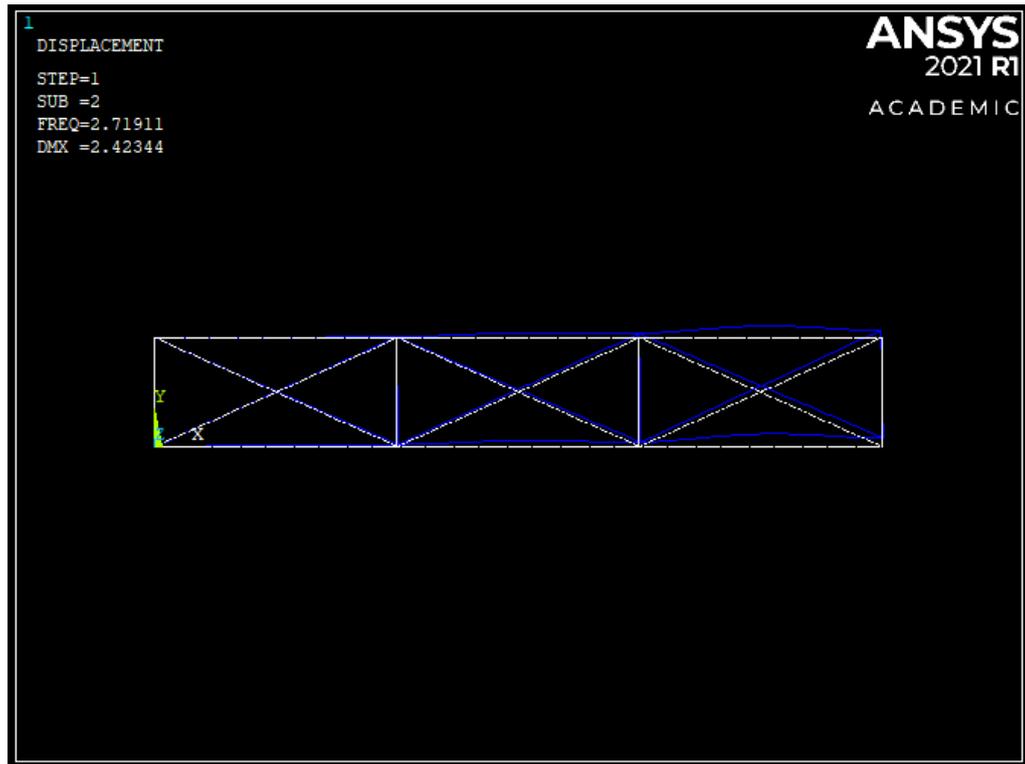


Figura 39 – IMAGEM DO 2º MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA NO ESTÁGIO FINAL (FREQUÊNCIA NATURAL 2,71 HZ)

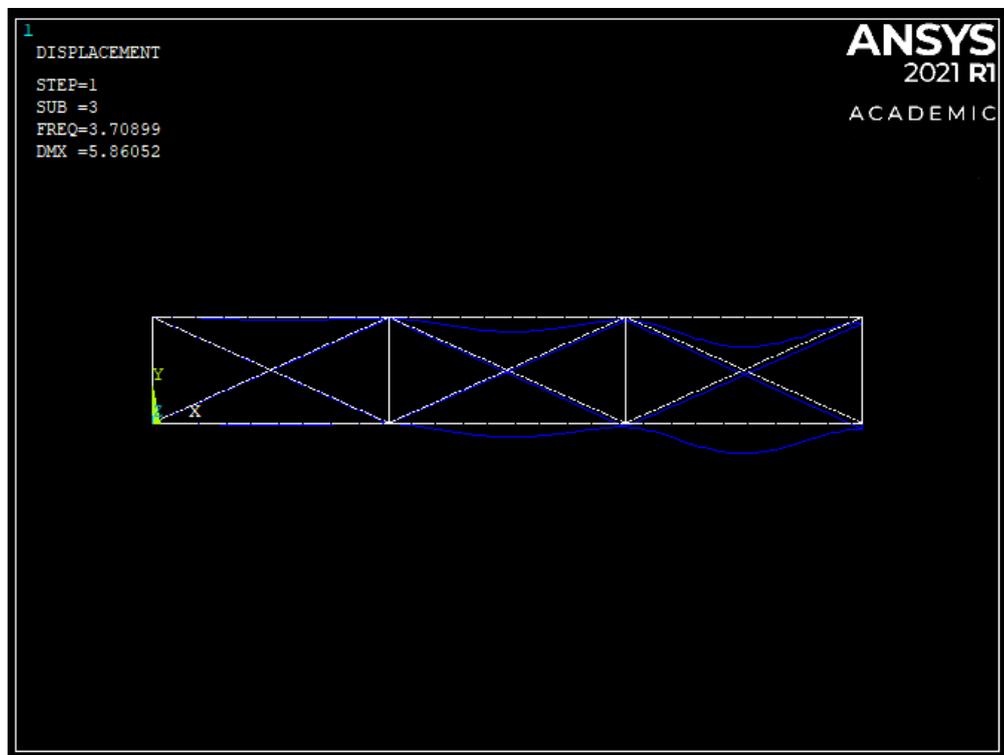


Figura 40 – IMAGEM DO 3º MODO DE VIBRAÇÃO DA ESTRUTURA NO ESTÁGIO FINAL (FREQUÊNCIA NATURAL 3,70 HZ)

É apresentada a Tabela 10 para tornar mais fácil a análise e comparação dos resultados obtidos para a eficácia da variação das frequências próprias da estrutura ativa

estudada no trabalho.

**Tabela 9 – TRÊS PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS OBTIDAS DO ANSYS PARA OS DOIS FORMATOS DA ESTRUTURA DO TRABALHO**

Frequências naturais	Estágio inicial	Estágio final	Variação %
1º	2,797 Hz	2,506 Hz	-10,40 %
2º	3,186 Hz	2,719 Hz	-14,65 %
3º	4,536 Hz	3,709 Hz	-18,23 %

Conforme é apresentado na Tabela 9, os valores das frequências naturais da estrutura tensíntegra do trabalho variam devido sua ativação. A estrutura quando ativada tem sua geometria e sua rigidez alteradas. Isso faz com que a estrutura mude seus modos de vibração e seus valores de frequências naturais associados a esses modos. Isso fica claro a partir da análise modal da estrutura ativa.

Note-se que a alteração de forma experimentada pela estrutura origina uma variação da frequência própria, associada ao primeiro modo de vibração, na ordem de 10,40 %, embora esta variação não seja igual para todas as configurações modais.

É possível identificar, também, que a variação percentual entre as frequências naturais das estruturas aumenta com o aumento dos modos de vibração. Por fim, o objetivo de identificar sua eficácia em variar a frequência própria através de atuadores de LMF é claramente observado. Sendo visto que a estrutura obteve variações acima de 18% da sua frequência própria, analisando somente os três primeiros modos de vibração.

## 6 CONCLUSÃO

As estruturas ativas podem se adaptar através de um sistema controlado de sensores e atuadores. Tirando partido do comportamento de memória de forma bidirecional das LMF consegue-se variar a forma e a rigidez da estrutura tensíntegra unicamente através do controlo da temperatura das LMF. Assim, através do aquecimento e arrefecimento das LMF consegue-se fazer com que a estrutura tensíntegra alterne entre duas configurações geométricas distintas, com rigidez diferente e, consequentemente com frequências próprias diferentes.

O que se esperava ao estudar o comportamento ativo em estruturas de tensigridade, era a investigação da eficácia da mudança do comportamento dinâmico. Para tal, estudou-se primeiramente o comportamento estático (pré-tensão) e dinâmico da estrutura básica em “X”. A estrutura em “X” é elementar, e a partir dela, é possível construir estruturas maiores e mais complexas. Como a estrutura composta pela união de três dessas estruturas em “X”, que também foi avaliada no trabalho.

Desenvolveu-se um modelo numérico em MATLAB e uma solução pelo software ANSYS, da estrutura que serviu de exemplo para a investigação dos resultados.

E vale destacar que, existem uma série de benefícios da estrutura do trabalho em situações reais. De modo sucinto, tal projeto de estrutura ativa teria aplicação em diversos tipos de situações com solicitações dinâmicas. Algumas das solicitações dinâmicas em estruturas são: a ação do vento, a ação das pessoas enquanto caminham (por exemplo, em pontes pedestres esta ação pode ser bastante condicionante no projeto da mesma), a ação das ondas do mar ou a ação de alguns motores elétricos.

Tendo uma aplicação fundamental em situações que cargas dinâmicas fossem capazes de gerar uma força cíclica, com frequência específica próxima a uma das frequências naturais da estrutura. Essa situação daria surgimento ao fenómeno da ressonância. E a consequência disso poderia ser o colapso de toda a estrutura. Se nessa hipótese a estrutura tivesse a capacidade de mudar seu modo de vibração e, consequentemente, sua frequência natural associada, para valores diferentes da frequência a qual está sendo excitada pelo carregamento cíclico, poderíamos evitar o fenómeno da ressonância, e assim, eventualmente o seu colapso estrutural.

Com relação ao método empregado pelo software ANSYS, de elementos finitos. Este requer esforço computacional, e para estruturas complexas requer ainda mais. Para algumas situações e equipamentos esse método pode despende muito tempo, principalmente em esforços de retrabalho. Porém, no melhor dos cenários é de longe a melhor solução. Admite a geometria íntegra da estrutura analisada, fornece os resultados dos mais vastos modos de vibração, os deslocamentos nodais, etc.

Depois de tudo que foi visto e estudado com o decorrer das pesquisas, cabe ressaltar algumas dificuldades para implementação do projeto que ficaram mais claras. Algumas são: Manter a estrutura em sua configuração mais curta (estágio final) implica manter a temperatura nas ligas permanentemente em 100°C aproximadamente. Isso implicaria em gastos excessivos de energia, o que poderá inviabilizar tal possibilidade.

Outro problema tem a ver com a velocidade do mecanismo de alteração de forma inverso, uma vez que a redução da temperatura da LMF é feita por convecção, sendo muito mais lenta que o aquecimento. Teria de se pensar em mecanismos de convecção forçada nas ligas para reduzir o tempo da atuação, caso fosse necessário.

O trabalho foi contundente em mostrar a partir dos resultados obtidos que estruturas de tensegridade ativas atuadas por ligas com memória de forma são eficientes como estruturas capazes de mudar seus modos e frequências próprias de vibração.

Importante destacar que o trabalho tratou de analisar as estruturas avaliando as condições extremas da estrutura (seu estágio inicial, com a liga a temperatura ambiente, e em seu estágio final após aquecimento das ligas). Logo, não se levou em consideração o fenômeno de histerese das ligas com memória de forma e não foi feita também uma análise transiente em função da variação de temperatura entre esses dois estágios.

Trabalhos que analisem essas condições desconsideradas podem ser feitos. Ficando como sugestão para possíveis trabalhos futuros. Os resultados obtidos até o momento podem ser a base para continuar com o estudo de estruturas mais complexas e que apresentem resultados e aplicações mais interessantes.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEL HADJ ALI, Nizar; F. C. SMITH, Ian. Dynamic behavior and vibration control of a tensegrity structure. **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 47, Ed. 9, Maio, 2010.

BEL HADJ ALI, Nizar; RHODE-BARBARIGOS, Landolf; ALBI, Alberto; IAN, Smith. Design optimization and dynamic analysis of a tensegrity-based footbridge. **Engineering Structures**, Vol. 32, Ed. 11, Novembro, 2010.

ASHWEAR, Nasseradeen; ERIKSSON, Anders. Natural frequencies describe the pre-stress in tensegrity structures. **Computers and Structures**, Vol 138, Julho, 2014.

BLEVINS, Robert D. **Formulas for Natural Frequency and Mode Shape**. New York: Litton Educational Publishing, 1979.

CASTILHO, W. S; SILVA, E. P. Algumas aplicações das ligas com memória de forma, **Sinergia, São Paulo**, Vol. 12, Ed. 1, Janeiro, 2011.

DEIFELD, Pauletti, **UM BREVE ESTUDO SOBRE AS ESTRUTURAS TENSEGRITY**. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica - Universidade de São Paulo, 2002.

DONGDONG, He; QIANG, Gao; WANXIE, Zhong. An accurate method for the dynamic behavior of tensegrity structures. **Engineering Computation**, Vol. 35, Ed. 3, Maio, 2018.

MOORED, K.W; KEMP, T.H; HOULE, N.E; BART-SMITH, H. Analytical predictions, optimization, and design of a tensegrity-based artificial pectoral fin. **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 48, Ed. 22-23, Novembro, 2011.

OPPENHEIM, I.J.; WILLIAMS, W.O. Vibration of an elastic tensegrity structure. **European Journal of Mechanics – A/Solids**, Vol. 20, Ed. 6, Novembro-Dezembro, 2001.

YAOWEN, Ou; XIAODONG, Feng; S. MIAH, Mohammad. Active vibration control of tensegrity structures for performance enhancement: A comparative study. **Earthquake Engineering and Engineering Vibration**, Vol. 18, Julho, 2019.

HIBBELER, R.C. **Resistência dos Materiais**. Ed. 3. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 2000.

PAIVA, Victor Antonio. **Static, Dynamic and Modal Analysis of Tensegrity Structures and Mechanisms**. 79 folhas. Dissertação de mestrado – Engenharia mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2019.

PEREIRA DE GODOI, Renan. **Estudo e caracterização da liga nitinol**. 78 folhas. Trabalho de conclusão de curso - Engenharia dos materiais, Universidade tecnológica federal do paraná - departamento acadêmico de engenharia de materiais, 2015.

MOTRO, R; RADUCANU, V. Tensegrity systems. **International Journal of Space structures**, 2003.

RODRIGUES, André. **Estudo de uma estrutura adaptativa baseada no conceito de tensegridade**. 129 folhas. Dissertação de mestrado – Engenharia civil, FCT Universidade de Lisboa, 2014.

SULTAN, Cornel. **Modeling, design and control of tensegrity structures with applications**. Purdue University, 1999.

SULTAN, Cornel. **Tensegrity motion control using internal mechanisms**. IEEE Control Applications (CCA) & Intelligent Control (ISIC), 2009.

TIBERT, A. G; PELLEGRINO, S. Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures. **International journal of space structures**, Vol. 18, Ed. 4, Dezembro, 2003.

## 8 ANEXO A – ROTINA MATLAB – ESTÁGIO INICIAL

% Trabalho de conclusão de curso

% Aluno: João Victor Pandino

% CEFET-RJ

clear;

clc;

E= 200\*(10^9); % Modulo de elasticidade das escoras [N/m<sup>2</sup>]

Ec= 67.5\*(10^9); % Modulo de elasticidade dos cabos [N/m<sup>2</sup>]

Ac= 1.104\*(10^-7); % Area da seção transversal dos cabos [m<sup>2</sup>]

Ae= 7.5\*(10^-5); % Area da seção transversal das escoras [m<sup>2</sup>]

angl= 71.57; % Valor do ângulo teta [°]

Te= angl\*pi/180; % Valor do ângulo teta [Rad]

m= 0.279; % Massa das escoras [kg]

Lch= 0.450; % Comprimento dos cabos horizontais [m]

Lcv= 0.150; % Comprimento dos cabos verticais [m]

Le= ((Lch^2)+(Lcv^2))^0.5; % Comprimento das escoras [m]

% Matriz de rigidez

K= [(E\*Ae/Le)\*(cos(Te))^2 + Ec\*Ac/Lcv, (E\*Ae/Le)\*sin(Te)\*cos(Te), -(Ec\*Ac/Lcv), 0, 0;

(E\*Ae/Le)\*sin(Te)\*cos(Te), (E\*Ae/Le)\*(sin(Te))^2 + Ec\*Ac/Lch, 0, 0, 0;

-(Ec\*Ac/Lcv), 0, (E\*Ae/Le)\*(cos(Te))^2 + Ec\*Ac/Lcv, -(E\*Ae/Le)\*sin(Te)\*cos(Te), -

(E\*Ae/Le)\*(cos(Te))^2;

0, 0, -(E\*Ae/Le)\*sin(Te)\*cos(Te), (E\*Ae/Le)\*(sin(Te))^2 + Ec\*Ac/Lch,

(E\*Ae/Le)\*sin(Te)\*cos(Te);

0, 0, -(E\*Ae/Le)\*(cos(Te))^2, (E\*Ae/Le)\*sin(Te)\*cos(Te), (E\*Ae/Le)\*(cos(Te))^2 +

Ec\*Ac/Lcv];

% Matriz de massa

M= [(m/3)\*(sin(Te))^2, -(m/3)\*sin(Te)\*cos(Te), 0, 0, 0;

-(m/3)\*sin(Te)\*cos(Te), (m/3)\*(cos(Te))^2, 0, 0, 0;

```
0, 0, (m/3)*(sin(Te))^2, (m/3)*sin(Te)*cos(Te), (m/6)*(sin(Te))^2;  
0, 0, (m/3)*sin(Te)*cos(Te), (m/3)*(cos(Te))^2, (m/6)*sin(Te)*cos(Te);  
0, 0, (m/6)*(sin(Te))^2, (m/6)*sin(Te)*cos(Te), (m/3)*(sin(Te))^2];
```

```
% Inversa da matriz de rigidez
```

```
invK= inv(K);
```

```
D= invK*M;
```

```
% Autovalores
```

```
omega= 1/sqrt(eig(D));
```

```
f= omega/(2*pi);
```

```
% Autovetores
```

```
auvet= eig(D);
```

## 9 ANEXO B – ROTINA MATLAB – ESTÁGIO FINAL

% Trabalho de conclusão de curso

% Aluno: João Victor Pandino

% CEFET-RJ

clear;

clc;

E= 200\*(10^9); % Modulo de elasticidade das escoras [N/m<sup>2</sup>]

Ec= 32\*(10^9); % Modulo de elasticidade dos cabos [N/m<sup>2</sup>]

Ac= 1.104\*(10^-7); % Area da seção transversal dos cabos [m<sup>2</sup>]

Ae= 7.5\*(10^-5); % Area da seção transversal das escoras [m<sup>2</sup>]

angl= 65.61; % Valor do ângulo teta [°]

Te= angl\*pi/180; % Valor do ângulo teta [Rad]

m= 0.279; % Massa das escoras [kg]

Lch= 0.432; % Comprimento dos cabos horizontais [m]

Lcv= 0.1959; % Comprimento dos cabos verticais [m]

Le= ((Lch^2)+(Lcv^2))^0.5; % Comprimento das escoras [m]

% Matriz de rigidez

K= [(E\*Ae/Le)\*(cos(Te))^2 + Ec\*Ac/Lcv, (E\*Ae/Le)\*sin(Te)\*cos(Te), -(Ec\*Ac/Lcv), 0, 0;

(E\*Ae/Le)\*sin(Te)\*cos(Te), (E\*Ae/Le)\*(sin(Te))^2 + Ec\*Ac/Lch, 0, 0, 0;

-(Ec\*Ac/Lcv), 0, (E\*Ae/Le)\*(cos(Te))^2 + Ec\*Ac/Lcv, -(E\*Ae/Le)\*sin(Te)\*cos(Te), -

(E\*Ae/Le)\*(cos(Te))^2;

0, 0, -(E\*Ae/Le)\*sin(Te)\*cos(Te), (E\*Ae/Le)\*(sin(Te))^2 + Ec\*Ac/Lch,

(E\*Ae/Le)\*sin(Te)\*cos(Te);

0, 0, -(E\*Ae/Le)\*(cos(Te))^2, (E\*Ae/Le)\*sin(Te)\*cos(Te), (E\*Ae/Le)\*(cos(Te))^2 +

Ec\*Ac/Lcv];

% Matriz de massa

M= [(m/3)\*(sin(Te))^2, -(m/3)\*sin(Te)\*cos(Te), 0, 0, 0;

```
-(m/3)*sin(Te)*cos(Te), (m/3)*(cos(Te))^2, 0, 0, 0;  
0, 0, (m/3)*(sin(Te))^2, (m/3)*sin(Te)*cos(Te), (m/6)*(sin(Te))^2;  
0, 0, (m/3)*sin(Te)*cos(Te), (m/3)*(cos(Te))^2, (m/6)*sin(Te)*cos(Te);  
0, 0, (m/6)*(sin(Te))^2, (m/6)*sin(Te)*cos(Te), (m/3)*(sin(Te))^2];
```

```
% Inversa da matriz de rigidez
```

```
invK= inv(K);
```

```
D= invK*M;
```

```
% Autovalores
```

```
omega= 1/sqrt(eig(D));
```

```
f= omega/(2*pi);
```

```
% Autovetores
```

```
auvet= eig(D);
```