

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO  
SUCKOW DA FONSECA - CEFET/RJ**

**Análise de tensões de hastes intramedulares em  
fêmur humano**

Débora Kelly da Silva Oliveira

Victor Hugo Dias dos Santos

Prof. Orientador: Paulo Pedro Kenedi

**Rio de Janeiro**

**Junho de 2016**

**CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO  
SUCKOW DA FONSECA – CEFET/RJ**

**Análise de tensões de hastes intramedulares em  
fêmur humano**

Débora Kelly da Silva Oliveira  
Victor Hugo Dias dos Santos

Projeto final apresentado em cumprimento às  
normas do Departamento de Educação Superior  
do CEFET/RJ, como parte dos requisitos para obtenção  
do título de Bacharel em Engenharia Mecânica

Prof. Orientador: Paulo Pedro Kenedi

**Rio de Janeiro  
Junho de 2016**

*“Pensar é o trabalho mais difícil que existe. Talvez por isso tão poucos se dediquem a ele.”*

*(Henry Ford)*

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Central do CEFET/RJ

O48 Oliveira, Débora Kelly da Silva  
Análise de tensões de hastes intramedulares em fêmur humano  
/ Débora Kelly da Silva Oliveira, Victor Hugo Dias dos Santos.—  
2016.  
xix, 50f. + apêndices : il. (algumas color.) , grafs. , tabs. ; enc.

Projeto Final (Graduação) Centro Federal de Educação  
Tecnológica Celso Suckow da Fonseca , 2016.  
Bibliografia : f. 48-50  
Orientador : Paulo Pedro Kenedi

1. Engenharia mecânica. 2. Deformações e tensões. 3.  
Biomecânica. 4. Barras (Engenharia) – Testes. 5. Fêmur. I. Santos,  
Victor Hugo Dias dos. II. Kenedi, Paulo Pedro (Orient.). III. Título.

CDD 621

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho aos meus pais e a minha irmã que, apesar das diversas dificuldades que enfrentamos, sempre me apoiaram e me deram forças para seguir em frente.

Débora Kelly da Silva Oliveira

Dedico este trabalho à minha família que contribuiu para a minha educação e formação, e desde o início de tudo me apoiou e continua apoiando as minhas escolhas.

Victor Hugo Dias dos Santos

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me sustentado e guiado até aqui.

Ao meu pai Roberto Alves Oliveira e minha mãe Maria Celia Oliveira pela educação, por toda força e apoio que me deram nessa caminhada e, principalmente por nunca me deixarem fraquejar. Obrigada por sempre apoiarem os meus sonhos por mais difíceis e inalcançáveis que pareçam.

À minha irmã Barbara Kelly Oliveira pelo companheirismo, amizade e por sempre torcer pelo meu sucesso.

À todos os amigos feitos ao longo da faculdade, em especial a Rosemere Lima e Victor Hugo que sempre estiveram ao meu lado nos bons e maus momentos. Obrigada por terem feito com que estes anos tenham sido especiais.

À minha segunda casa Torino e a todos os amigos feitos nesta, que em cada momento compartilhado me ensinaram e permitiram crescer pessoalmente e profissionalmente e, que me fizeram enxergar o mundo com novos olhos.

Ao nosso orientador Paulo Pedro Kenedi agradeço por todo apoio recebido ao longo da elaboração deste trabalho.

Débora Kelly da Silva Oliveira

Agradeço a Deus por sempre guiar meus passos para caminhos valiosos e ter me trazido até aqui.

À minha mãe Rosimar Dias e ao meu pai José Paulo dos Santos, que sempre apoiaram minhas escolhas e acompanharam minha jornada até aqui, dando toda educação e o suporte necessário, modelando meu caráter e me transformando no homem íntegro que eu sou hoje.

À minha irmã Jacqueline Dias por sempre me apoiar em tudo, estar sempre ao meu lado nos momentos bons e ruins e sempre torcer pelo meu sucesso.

Às minhas amigas Débora Kelly e Rosemere Lima que desde o início dessa jornada acadêmica dividem comigo bons e maus momentos; agradeço por terem feito esses anos mais fáceis e por permanecerem unidas e sempre apoiando.

Aos meus amigos, em especial aos amigos de Liverpool, que estiveram ao meu lado em um ano muito especial e são minha segunda família.

À minha cidade do coração, Liverpool, que me acolheu e fez de um momento da minha vida o mais especial, me permitindo crescer como ser humano.

Agradeço especialmente ao Bruno Sampaio por me apoiar, ajudar, guiar e estar sempre ao meu lado.

Ao nosso orientador, Paulo Pedro Kenedi, agradeço por todo apoio recebido ao longo da elaboração deste trabalho.

Victor Hugo Dias dos Santos

## RESUMO

A movimentação do corpo humano é um processo de grande complexidade, pois envolve a utilização de músculos, tendões, ossos e outros tecidos. A estrutura óssea do corpo humano possui características peculiares de material, propriedades mecânicas e organização do tecido ósseo para promover a sustentação e proteção dos órgãos internos. Quando um osso fratura é necessário, em muitos casos, a depender da complexidade desta e do local da mesma, a utilização de elementos de fixação e sustentação da região para auxiliar na aceleração do processo de recuperação. Por se tratar do osso mais longo do corpo humano, o processo de recuperação do fêmur torna-se mais difícil e demorado. O estudo desse projeto consiste na análise de tensões na região diafisária de uma haste intramedular bloqueada, utilizada em situações de fratura diafisária do fêmur humano. Para a realização desse estudo será realizada uma análise utilizando os conceitos de Resistência dos Materiais.

Palavras-chave: Haste intramedular, fêmur, análise de tensões.

## **ABSTRACT**

The movement of human body is a process of great complexity that involves muscles, tendons, bones and many tissues. The bone structure has particular characteristics of material, mechanical properties and tissue organization that give sustentation and protection to the intern organs. It is known that when there is a bone fracture, regarding its complexity and its localization, it is usually necessary to use fixing elements to help accelerate the healing process. Femur is the longest bone of the human body and the most requested in mobility; therefore, it has a hard recovery and long rehabilitation to the patient. The aim of this project consists in a stress analysis at the medial area of an interlocking intramedullary nail, which is used in the treatment of femoral shaft fractures. This consists in a simplified analytical study that will be based on the fundamental concepts of Solid Mechanics.

**Keywords:** Intramedullary nail, femur, stress analysis.

# SUMÁRIO

Capítulo 1 .....	1
Introdução .....	1
1.1. Motivação .....	1
1.2. Justificativa.....	1
1.3. Objetivos .....	1
1.4. Metodologia e trabalho realizado .....	1
1.5. Organização do trabalho .....	2
Capítulo 2 .....	3
Revisão Bibliográfica.....	3
2.1. Sistema esquelético .....	3
2.1.1. Osteologia .....	3
2.1.2. Crescimento e Remodelação Óssea .....	5
2.2. Biomecânica Óssea.....	7
2.2.1. Propriedades Mecânicas .....	7
2.2.2. Fratura Óssea.....	7
2.2.3. Tipos de fraturas.....	8
2.3. Métodos de correção das fraturas .....	11
2.3.1. Fixadores externos .....	11
2.3.2. Parafusos de compressão .....	12
2.3.3. Placas de osteossíntese (placas em ponte).....	12
2.3.4. Hastes intramedulares.....	13
2.4. Revisão dos conceitos para a análise de tensões.....	15
2.4.1. Forças.....	16
2.4.2. Propriedades mecânicas.....	16
2.4.3. Tensões.....	18
2.4.4. Rigidez .....	22
2.4.5. Modelagem .....	23
Capítulo 3 .....	24
Metodologia.....	24
3.1. Modelo analítico .....	24
3.1.1. Forças externas.....	25

3.1.2. Forças e momentos internos .....	26
3.1.3. Rigidezes.....	27
3.1.4. Quantificação dos carregamentos através das rigidezes .....	29
3.1.5. Situações analisadas .....	32
<b>Capítulo 4 .....</b>	<b>40</b>
<b>Análise e discussão de resultados .....</b>	<b>40</b>
<b>4.1. Resultados obtidos .....</b>	<b>40</b>
<b>4.2. Influência na distribuição das tensões devido a mudança de material da haste intramedular.....</b>	<b>44</b>
<b>Capítulo 5 .....</b>	<b>46</b>
<b>Conclusão .....</b>	<b>46</b>
<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>48</b>
<b>APÊNDICE A: Expressões referentes a geometria da seção transversal analisada .....</b>	<b>51</b>
<b>APÊNDICE B: Valores das forças externas, pontos de aplicação e distâncias até o centroide da região analisada .....</b>	<b>52</b>
<b>APÊNDICE C: Programação no Mathcad - Modelo Apenas o Osso .....</b>	<b>53</b>
<b>APÊNDICE D: Programação no Mathcad - Modelo Apenas a Haste.....</b>	<b>60</b>
<b>APÊNDICE E: Programação no Mathcad - Modelo Haste e Osso.....</b>	<b>67</b>

## LISTA DE FIGURAS

<b>FIGURA 1:</b> Seção Frontal: Estrutura Femoral Interna [3].....	4
<b>FIGURA 2:</b> Fêmur Humano [3] .....	4
<b>FIGURA 3:</b> Células presentes na matriz óssea [6].....	6
<b>FIGURA 4:</b> Fraturas ósseas devido diferentes sobrecargas [9].....	8
<b>FIGURA 5:</b> Tipos de fraturas [10] .....	9
<b>FIGURA 6:</b> Classificação de fraturas [8] .....	10
<b>FIGURA 7:</b> Ordem de severidade da fratura [10].....	10
<b>FIGURA 8:</b> Fixador externo [13].....	12
<b>FIGURA 9:</b> Parafuso de compressão [14].....	12
<b>FIGURA 10:</b> Placa de osteossíntese [16] .....	13
<b>FIGURA 11:</b> Haste de Küntcher [17].....	14
<b>FIGURA 12:</b> Haste flexível [18].....	14
<b>FIGURA 13:</b> Haste bloqueada com combinações de fixação variadas [18] .....	15
<b>FIGURA 14:</b> Cargas internas [19].....	16
<b>FIGURA 15:</b> Diagrama tensão-deformação do aço [19].....	17
<b>FIGURA 16:</b> Módulo de elasticidade [19] .....	17
<b>FIGURA 17:</b> Módulo de elasticidade ao cisalhamento [19] .....	18
<b>FIGURA 18:</b> Variação da tensão de flexão [19] .....	19
<b>FIGURA 19:</b> Variação linear da tensão de cisalhamento num eixo de seção circular [19] ....	20
<b>FIGURA 20:</b> Comparação viga-mola. [21] .....	22
<b>FIGURA 21:</b> Associação de molas em série. [21] .....	22
<b>FIGURA 22:</b> Associação de molas em paralelo. [21] .....	23
<b>FIGURA 23:</b> Região escolhida para a análise [18] .....	24
<b>FIGURA 24:</b> Pontos de análise .....	25
<b>FIGURA 25:</b> Forças atuantes na cabeça do fêmur [15] .....	25
<b>FIGURA 26:</b> Associação em paralelo conjunto osso-haste intramedular .....	29
<b>FIGURA 27:</b> Seção transversal do fêmur na região diafisária. ....	32
<b>FIGURA 28:</b> Seção transversal da haste intramedular na região diafisária .....	34
<b>FIGURA 29:</b> Seção transversal do conjunto haste-osso na região diafisária .....	36
<b>FIGURA 30:</b> Gráfico das tensões combinadas atuantes no osso .....	41
<b>FIGURA 31:</b> Gráfico das tensões principais - Modelo Apenas o Osso .....	41

<b>FIGURA 32:</b> Von Mises – Modelo Apenas a Haste .....	42
<b>FIGURA 33:</b> Von Mises – Modelo Haste e Osso .....	43
<b>FIGURA 34:</b> Gráfico das tensões principais - Modelo Haste e Osso .....	43

## LISTA DE TABELAS

<b>TABELA 1:</b> Classificação das fraturas [8].....	11
<b>TABELA 2:</b> Rigidezes equivalentes.....	29
<b>TABELA 3:</b> Resumo das forças e momentos internos em função das rigidezes .....	31
<b>TABELA 4:</b> Distribuição dos esforços.....	45
<b>TABELA A1:</b> Expressões – Geometrias .....	51
<b>TABELA B1:</b> Valores das forças externas atuantes na cabeça do fêmur, pontos de aplicação e distâncias [24] .....	52

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

AH – Apenas a Haste

AO – Apenas o Osso, Arbeitsgemeinschaft für Osteosynthesefragen

ASIF – Association for the Study of Internal Fixation

HO – Haste e Osso

Mathcad – Mathematic Computer Aided Design

OTA – Orthopedic Trauma Association

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$  – Área

$A^h$  – Área da seção transversal da haste intramedular

$A^o$  – Área da seção transversal do osso

$c$  – Distância perpendicular do eixo neutro a um ponto mais afastado deste eixo, onde  $\sigma_{\text{máx}}$  age

$d$  – Distância do ponto de aplicação da força até o centroide da seção analisada

$E$  – Módulo de elasticidade ou Módulo de Young

$E^h$  – Módulo de elasticidade ou Módulo de Young da haste

$E^o$  – Módulo de elasticidade ou Módulo de Young do osso

$F$  – Força

$F_R$  – Força resultante

$G$  – Módulo de elasticidade ao cisalhamento

$G^h$  – Módulo de elasticidade ao cisalhamento da haste

$G^o$  – Módulo de elasticidade ao cisalhamento do osso

$h$  – Índice referente a haste intramedular

$I$  – Momento de inércia de área

$I_x^h$  – Momento de inércia de área em relação ao eixo  $x$  da haste

$I_x^o$  – Momento de inércia de área em relação ao eixo  $x$  do osso

$I_y^h$  – Momento de inércia de área em relação ao eixo  $y$  da haste

$I_y^o$  – Momento de inércia de área em relação ao eixo  $y$  do osso

$J$  – Momento polar de inércia de área

$J^h$  – Momento polar de inércia de área da haste intramedular

$J^o$  – Momento polar de inércia de área do osso

$k$  – Rigidez

$k_1$  – Rigidez do elemento 1

$k_2$  – Rigidez do elemento 2

$k_a$  – Rigidez axial

$k_a^{\text{eq}}$  – Rigidez equivalente para o carregamento axial

$k_a^h$  – Rigidez axial para a haste

$k_a^o$  – Rigidez axial para o osso

$k_{\text{eq}}$  – Rigidez equivalente

$k_f$  – Rigidez fletora

- $k_{fx}^{eq}$  – Rigidez equivalente fletora em relação ao eixo x  
 $k_{fy}^{eq}$  – Rigidez equivalente fletora em relação ao eixo y  
 $k_{fx}^h$  – Rigidez fletora em relação ao eixo x para a haste  
 $k_{fx}^o$  – Rigidez fletora em relação ao eixo x para o osso  
 $k_{fy}^h$  – Rigidez fletora em relação ao eixo y para a haste  
 $k_{fy}^o$  – Rigidez fletora em relação ao eixo y para o osso  
 $k_t$  – Rigidez torsora  
 $k_t^{eq}$  – Rigidez equivalente torsora  
 $k_t^h$  – Rigidez torsora para a haste  
 $k_t^o$  – Rigidez torsora para o osso  
L – Distância do ponto de aplicação da força externa até o centroide da região analisada  
M – Momento fletor  
 $M_{RO}$  – Momento resultante  
 $M_x$  – Somatório dos momentos fletores em relação a x  
 $M_x^h$  – Somatório dos momentos fletores em relação a x na haste  
 $M_x^o$  – Somatório dos momentos fletores em relação a x no osso  
 $M_y$  – Somatório dos momentos fletores em relação a y  
 $M_y^h$  – Somatório dos momentos fletores em relação a y na haste  
 $M_y^o$  – Somatório dos momentos fletores em relação a y no osso  
 $M_z$  – Somatório dos torques  
 $M_z^h$  – Somatório dos torques relativos a haste  
 $M_z^o$  – Somatório dos torques relativos ao osso  
N – Força normal  
o – Índice referente ao osso  
p – Ponto  
 $p_o$  – Ponto na superfície externa do osso  
 $p_h$  – Ponto na superfície externa da haste  
P – Carga axial interna na seção  
 $P_1$  – Reação da Junta  
 $P_2$  – Força Adutora  
 $P_3$  – Força Iliopsoa  
 $P_4$  – Força Trato Iliotibial

$Q$  – Momento de primeira ordem da seção transversal

$Q_x^h$  – Momento de primeira ordem da seção transversal da haste intramedular

$Q_y^h$  – Momento de primeira ordem da seção transversal da haste intramedular

$Q_x^o$  – Momento de primeira ordem da seção transversal do osso

$Q_y^o$  – Momento de primeira ordem da seção transversal do osso

$r$  – Raio

$r_e$  – Raio externo do osso

$r_{eh}$  – Raio externo da haste intramedular

$r_i$  – Raio interno do osso

$r_{ih}$  – Raio interno da haste intramedular

$t$  – Espessura

$T$  – Momento de torção ou torque

$V$  – Força de cisalhamento

$V_x$  – Somatório das forças de cisalhamento transversal na direção  $x$

$V_x^h$  – Somatório das forças de cisalhamento transversal na direção  $x$  relativas a haste

$V_x^o$  – Somatório das forças de cisalhamento transversal na direção  $x$  relativas ao osso

$V_y$  – Somatório das forças de cisalhamento transversal na direção  $y$

$V_y^h$  – Somatório das forças de cisalhamento transversal na direção  $y$  relativas a haste

$V_y^o$  – Somatório das forças de cisalhamento transversal na direção  $y$  relativas ao osso

$V_z$  – Somatório das for normais

$V_z^h$  – Somatório das forças normais relativas a haste

$V_z^o$  – Somatório das forças normais relativas ao osso

$x$  – Comprimento, Coordenada  $x$

$y$  – Coordenada  $y$

$\gamma$  – Deformação por cisalhamento, Ângulo da posição de um ponto na parede externa do osso ou da haste

$\varepsilon$  – Deformação linear

$\theta$  – Deslocamento angular devido a aplicação de um momento

$\rho$  – Distância do centro da seção até uma posição intermediária

$\sigma$  – Tensão axial

$\sigma_{eq}$  – Tensão pelo Critério de von Mises

$\sigma_x$  – Tensão na direção  $x$  do elemento analisado

$\sigma_y$  – Tensão na direção  $y$  do elemento analisado

- $\sigma_{zx}^{AH}$  – Tensão de flexão na direção x no Modelo Apenas a Haste  
 $\sigma_{zx}^{AO}$  – Tensão de flexão na direção x no Modelo Apenas o Osso  
 $\sigma_{zx}^{HO}$  – Tensão de flexão na direção x no Modelo Haste e Osso  
 $\sigma_{zy}^{AH}$  – Tensão de flexão na direção y no Modelo Apenas a Haste  
 $\sigma_{zy}^{AO}$  – Tensão de flexão na direção y no Modelo Apenas o Osso  
 $\sigma_{zy}^{HO}$  – Tensão de flexão na direção y no Modelo Haste e Osso  
 $\sigma_{z\_axial}^{AH}$  – Tensão axial no Modelo Apenas a Haste  
 $\sigma_{z\_axial}^{AO}$  – Tensão axial no Modelo Apenas o Osso  
 $\sigma_{z\_axial}^{HO}$  – Tensão axial no Modelo Haste e Osso  
 $\sigma_{z\_flexão}^{AH}$  – Tensão de flexão total no Modelo Apenas a Haste  
 $\sigma_{z\_flexão}^{AO}$  – Tensão de flexão total no Modelo Apenas o Osso  
 $\sigma_{z\_flexão}^{HO}$  – Tensão de flexão total no Modelo Haste e Osso  
 $\sigma(\gamma)_{1,2}$  – Tensões principais  
 $\tau_{xy}$  – Tensão de cisalhamento no plano x e direção y  
 $\tau_{zx}$  – Tensão de cisalhamento no plano z e direção x  
 $\tau_{zy}$  – Tensão de cisalhamento no plano z e direção y  
 $\tau_{zx}^{AH}$  – Tensão de cisalhamento transversal na direção x no Modelo Apenas a Haste  
 $\tau_{zx}^{AO}$  – Tensão de cisalhamento transversal na direção x no Modelo Apenas o Osso  
 $\tau_{zx}^{HO}$  – Tensão de cisalhamento transversal na direção x no Modelo Haste e Osso  
 $\tau_{zy}^{AH}$  – Tensão de cisalhamento transversal na direção y no Modelo Apenas a Haste  
 $\tau_{zy}^{AO}$  – Tensão de cisalhamento transversal na direção y no Modelo Apenas o Osso  
 $\tau_{zy}^{HO}$  – Tensão de cisalhamento transversal na direção y no Modelo Haste e Osso  
 $\tau_{zz}$  – Torção  
 $\tau_{zz}^{AH}$  – Torção no Modelo Apenas a Haste  
 $\tau_{zz}^{AO}$  – Torção no Modelo Apenas o Osso  
 $\tau_{zz}^{HO}$  – Torção no Modelo Haste e Osso  
 $\nu$  – Coeficiente de Poisson  
 $\phi$  – Ângulo de torção de um eixo circular

# Capítulo 1

## Introdução

Como forma de melhorar a vida das pessoas, a medicina tem promovido diversos avanços tecnológicos. Uma dessas inovações médicas foi o desenvolvimento da haste intramedular como alternativa ao método de placas de osteossíntese em casos de fratura em ossos longos, que são ossos de grande solitação. Este projeto de fim de curso irá analisar a distribuição das tensões na região diafisária de uma haste intramedular bloqueada utilizada em cirurgias de fraturas diafisárias do fêmur. Tal estudo será realizado como forma de avaliar o comportamento mecânico da haste intramedular durante o processo de recuperação dos pacientes.

### 1.1. Motivação

As cirurgias ortopédicas em fêmur, para fraturas diafisárias, são de grande complexidade e exigem do paciente um longo tempo de recuperação. Este trabalho tem como motivação entender a distribuição das tensões na haste intramedular durante a recuperação do fêmur, podendo futuramente auxiliar na otimização destas para minimizar a ocorrência de complicações e reduzir o tempo de recuperação do paciente durante o pós-operatório.

### 1.2. Justificativa

Avaliar a distribuição das tensões durante o processo de recuperação do fêmur para auxiliar em uma futura otimização dos métodos utilizados em tal procedimento.

### 1.3. Objetivos

Avaliar o conjunto fêmur-haste intramedular bloqueada, de modo que seja possível avaliar a distribuição das tensões em seções transversais desse tipo de haste.

### 1.4. Metodologia e trabalho realizado

Inicialmente realizou-se uma busca de referências bibliográficas relativas à análise estrutural e propriedades mecânicas e, mais intensamente, nos campos da medicina para um

melhor entendimento do objeto deste estudo. Com o embasamento teórico aprofundado, realizou-se uma análise analítica, com o auxílio do software Mathcad 15.0, baseada nos conceitos de Resistência dos Materiais.

### **1.5. Organização do trabalho**

O presente trabalho de fim de curso foi desenvolvido em cinco capítulos. No capítulo 1 foi realizada uma introdução do tema, apresentação do objetivo e metodologia. No capítulo 2 foi realizada uma revisão bibliográfica apresentando os conceitos relacionados ao sistema esquelético, às fraturas ósseas, aos métodos utilizados na correção das fraturas e à Resistência dos materiais. Conceitos que são importantes para a compreensão do presente trabalho de fim de curso. Nos capítulos 3 e 4 foram apresentados, respectivamente, o modelo elaborado para a análise de tensões da haste intramedular e a discussão dos resultados obtidos. No capítulo 5 foi realizada a conclusão deste trabalho e foram apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

### Revisão Bibliográfica

Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica dos conceitos relacionados ao sistema esquelético, às fraturas ósseas, aos métodos utilizados na correção das fraturas e à Resistência dos materiais, considerados importantes para a compreensão do presente trabalho de fim de curso.

#### 2.1. Sistema esquelético

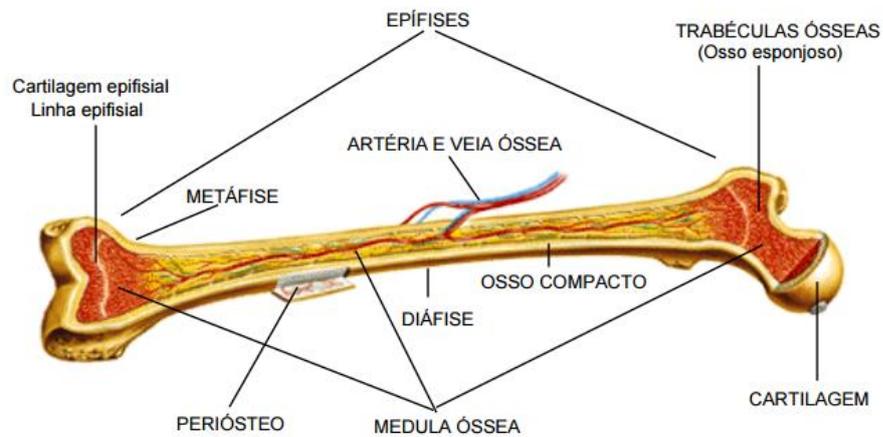
O Sistema esquelético humano consiste em um conjunto de ossos, cartilagens e ligamentos que se interligam para formar o arcabouço do corpo e desempenhar várias funções, tais como: proteção dos órgãos internos e do sistema nervoso central; sustentação e conformação do corpo; local de armazenamento de cálcio e fósforo; sistema de alavancas que movimentadas pelos músculos permitem os deslocamentos do corpo, e finalmente, local de produção de várias células do sangue. [1]

##### 2.1.1. Osteologia

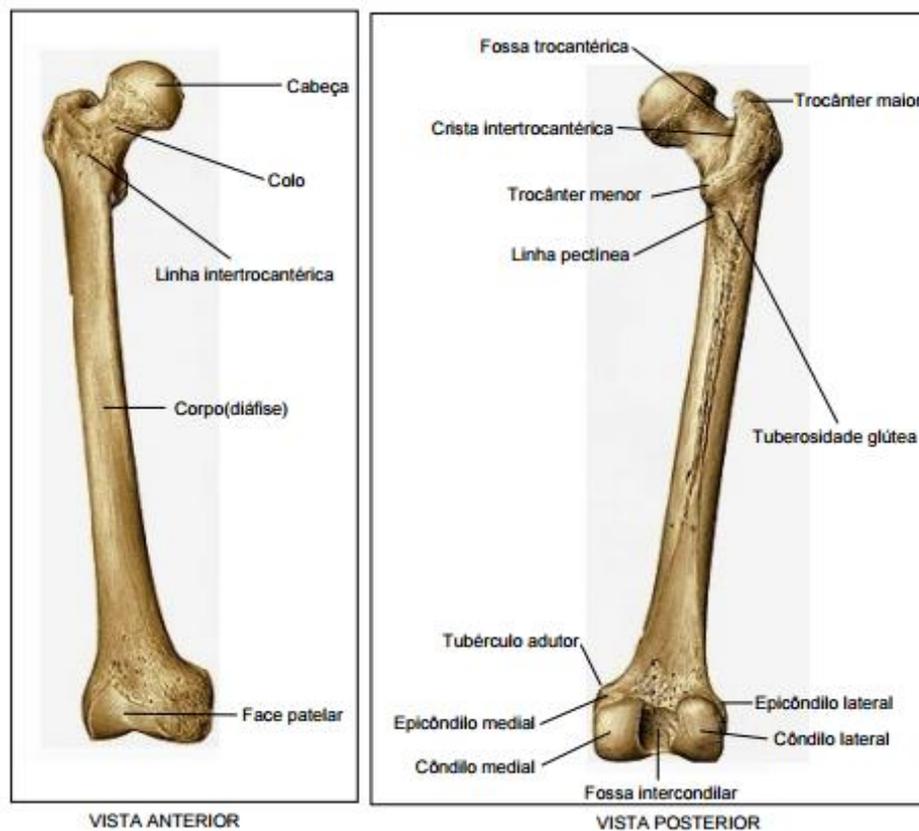
Os ossos são os principais componentes do sistema esquelético e existem diversas classificações para eles. O esqueleto pode ser dividido nos grupos axial e apendicular. O esqueleto axial é constituído por um conjunto de ossos que englobam o crânio, coluna vertebral e as vértebras. O esqueleto apendicular refere-se aos ossos que constituem os membros superiores e inferiores. Porém, a maneira mais difundida é a classificação que leva em consideração a forma dos ossos, classificando-os segundo a relação entre suas dimensões lineares (comprimento, largura ou espessura), em ossos longos, curtos, planos (laminares) e irregulares. [2]

Os ossos longos são aqueles que apresentam um comprimento consideravelmente maior que as suas dimensões transversais. Apresentam duas extremidades denominadas epífises, e um corpo denominado diáfise. Possui no seu interior, uma cavidade, canal medular, que aloja a medula óssea (Fig. 1). Os ossos longos são também denominados de tubulares. Existe ainda uma região chamada metáfise que permite a conexão das epífises à diáfise durante a fase de

crescimento e o desenvolvimento ósseo. [1] Um exemplo de osso longo é o fêmur (Fig. 1 e 2), que será o objeto de estudo deste projeto.



**FIGURA 1:** Seção Frontal: Estrutura Femoral Interna [3]



**FIGURA 2:** Fêmur Humano [3]

O estudo microscópico do tecido ósseo distingue a substância óssea compacta e a esponjosa. Embora os elementos constituintes sejam os mesmos nos dois tipos de substância

óssea, eles dispõem-se diferentemente conforme o tipo considerado e a seu aspecto macroscópico. Na substância óssea compacta, as lamínulas de tecido ósseo encontram-se fortemente unidas umas às outras pelas suas faces, sem que haja espaço livre interposto. Por esta razão, este tipo é mais denso e duro. Na substância óssea esponjosa as lamínulas ósseas, mais irregulares em forma e tamanho, se arranjam de forma a deixar entre si espaços ou lacunas que se comunicam umas com as outras e que, à semelhança do canal medular, contém medula óssea. [1]

Nos ossos longos, a diáfise é composta por osso compacto (osso cortical, que representa cerca de 80% da massa esquelética de um adulto) externamente ao canal medular, enquanto as epífises são compostas por osso esponjoso (osso trabecular, que representa cerca de 20% da massa de um adulto) envolto por uma fina camada de osso cortical. [2] Portanto, tem-se que a região a ser analisada, porção diafisária do fêmur, possui sua matriz óssea composta predominantemente por osso cortical.

### **2.1.2. Crescimento e Remodelação Óssea**

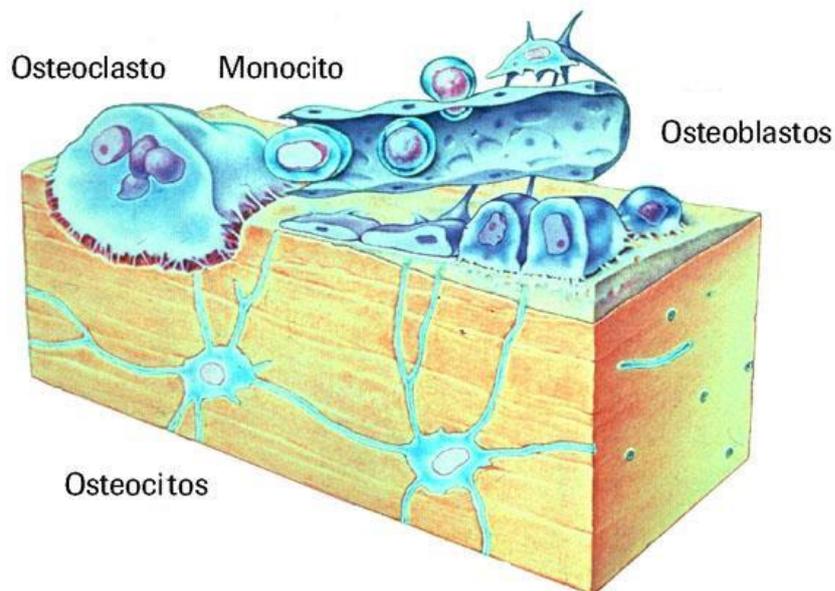
O crescimento do osso é o processo de síntese de um novo tecido ósseo, ao mesmo tempo em que há uma reabsorção parcial do tecido antigo, já formado. Esse processo permite aos ossos manter a forma enquanto crescem.

Nos ossos longos, as epífises aumentam de tamanho devido ao crescimento radial da cartilagem. A diáfise cresce em extensão pela atividade dos discos epifisários e, em espessura, pela formação de tecido ósseo na superfície externa da diáfise com reabsorção na superfície interna. Esta reabsorção interna aumenta o diâmetro do canal medular. Apesar da sua resistência às pressões e da sua dureza, o tecido ósseo é muito plástico, sendo capaz de remodelar sua estrutura interna em resposta a modificações nas forças a que está submetido. [4]

Sendo a estrutura do tecido ósseo, uma forma especializada de tecido conjuntivo, é constituído por células ósseas e uma matriz extracelular. A matriz extracelular ou também designada de matriz óssea apresenta-se fortemente mineralizada, o que proporciona dureza ao tecido ósseo. É formada por uma componente inorgânica (mineral), uma componente orgânica (na sua maioria colágeno) e água. A matriz inorgânica corresponde a 65% da composição óssea, da qual fazem parte os minerais ósseos, principalmente hidroxapatita ( $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$ ). Dos 35% restantes fazem parte, a matriz orgânica, células e água. Da matriz orgânica fazem parte 90% de colágeno e 10% de várias proteínas não colagênicas. As fibras de colágeno são flexíveis e contribuem com a resistência à tração. Assim, pode-se dizer que a componente inorgânica

confere ao osso rigidez e dureza, sendo que a componente orgânica oferece ao osso flexibilidade e elasticidade. [2]

A remodelação óssea é um processo constante que remove o osso gasto, lesado e o substitui por um tecido novo. Ele também permite ao osso servir como área de armazenamento para o cálcio corporal. Como muitos tecidos no corpo dependem de cálcio para seus funcionamentos, o sangue troca continuamente cálcio com os ossos, retirando dos ossos a quantidade de cálcio que o próprio sangue e os outros tecidos não estão recebendo suficientemente, e suprindo novamente os ossos para impedi-los de perder massa. As células presentes na matriz óssea (Fig. 3) são de grande importância no processo de crescimento e remodelação. Os osteoclastos são responsáveis pela reabsorção (destruição da matriz) do tecido ósseo; é mantida uma homeostase minuciosa entre a ação desses, que removem cálcio e colágeno, e a ação dos osteoblastos, sintetizadores ósseos com a deposição de cálcio e de colágeno. [5] Os osteócitos (células mais abundantes nos ossos maduros) provêm de osteoblastos, fixados na sua própria matriz, e são consideradas células com melhor posicionamento para entender a magnitude e a distribuição das deformações no tecido ósseo. Estas células têm como principal função realizar a manutenção da matriz óssea, detectando os micro-danos na estrutura. [2]



**FIGURA 3:** Células presentes na matriz óssea [6]

## **2.2. Biomecânica Óssea**

O comportamento biológico do tecido ósseo e a mecânica do funcionamento do sistema esquelético são explicadas através da composição química dos mesmos e das propriedades que esses componentes conferem ao sistema. Tendo conhecimento dessas atividades biomecânicas, pode-se analisar e prever o comportamento ósseo em diversas situações.

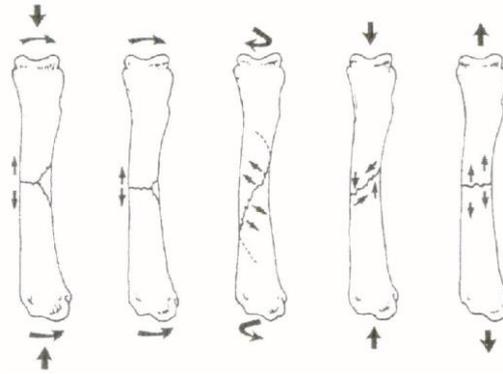
### **2.2.1. Propriedades Mecânicas**

Como visto anteriormente, no processo de crescimento e remodelação óssea (tópico 2.1.2), 65% da composição óssea corresponde à matriz inorgânica, da qual fazem parte os minerais ósseos que conferem ao osso rigidez e dureza; dos 35% restantes fazem parte, a matriz orgânica, células e água. Da matriz orgânica fazem parte 90% de colágeno e 10% de várias proteínas não colagênicas. As fibras de colágeno conferem ao osso, flexibilidade e contribuem com a resistência à tração (elasticidade).

O corpo humano é um mecanismo complexo que está sujeito a um conjunto de forças que variam com o tempo. A biomecânica do corpo humano é influenciada por diversos fatores, como: idade, estado físico do indivíduo, direção da carga aplicada (longitudinal, transversal), velocidade de aplicação da força e o tipo de carregamento (compressão, tração e corte). [7] No caso dos ossos, além das forças internas que provem dos músculos e ligamentos adjuntos atuando diretamente sobre eles, há também as forças externas relativas à sustentação, e as forças aplicadas sobre o corpo que provem do ambiente externo. Essas forças externas, quando advindas de situações de acidente, não possuem um limite de intensidade e nem direção de aplicação e, por isso, são consideradas as maiores causadoras de fraturas ósseas.

### **2.2.2. Fratura Óssea**

As fraturas ósseas são o resultado de uma sobrecarga que pode ser única ou múltipla, com uma magnitude que excede o limite suportado pelo osso (Fig. 4), que ocorrem em um tempo muito pequeno. O efeito mecânico de uma fratura consiste principalmente numa perda da continuidade óssea, levando a uma mobilidade dificultada, perda da função de suporte ósseo e ao aparecimento da dor. [8]



**FIGURA 4:** Fraturas ósseas devido diferentes sobrecargas [9]

Dentre as fraturas ósseas, as mais comuns são as fraturas traumáticas que ocorrem nos ossos sem doença prévia, devido à aplicação de uma força que excede o limite de resistência do osso. Na maioria das vezes, ocorrem nos ossos longos do membro inferior devido a acidentes que provoquem grandes impactos, como por exemplo, acidentes de carro. Os ossos raramente fraturam sob influência de uma única força, normalmente cargas combinadas provocam a ruptura óssea. [9]

No presente estudo será analisado a fratura óssea do fêmur, devido a esse ser um osso de grande sollicitação no corpo humano e de relativa complexidade. A fratura em questão localiza-se na região diafisária do fêmur, causada pela aplicação de uma sobrecarga que exceda o limite de resistência do osso cortical.

### 2.2.3. Tipos de fraturas

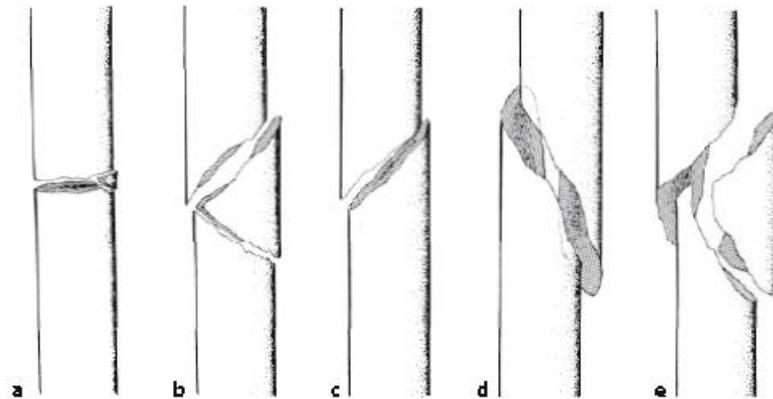
A principal função do osso é atuar como mecanismo de suporte e transmissão de carga. O osso possui grande resistência a compressão, porém é menos resistente quando submetido a forças de tração. Fraturas devido a esforços de compressão são, portanto, raras e ocorrem somente em áreas com maior preenchimento de osso trabecular e uma fina camada de osso cortical. Portanto, pode-se encontrar fraturas devido a compressão em áreas como a metáfise, vértebras e calcâneo. Em osso tubular, como o fêmur, os tipos de fratura de ocorrência mais comuns são: transversal, oblíqua e em espiral (em hélice). [10]

As fraturas transversais (Fig. 5.a) são resultado de uma força de flexão; elas estão associadas a uma pequena extrusão em cunha que é sempre encontrada no lado comprimido do osso. Se essa extrusão em cunha comprometer menos de 10% da circunferência, a fratura é considerada uma fratura transversal simples. Se o fragmento expelido for maior do que 10% da

circunferência, a fratura é considerada uma fratura em cunha e o fragmento, de flexão ou extrusão, em cunha (Fig. 5.b). [10]

As fraturas oblíquas (Fig. 5.c) também são resultado de uma força de flexão. A extrusão em cunha permanece acoplada a um dos fragmentos principais. [10]

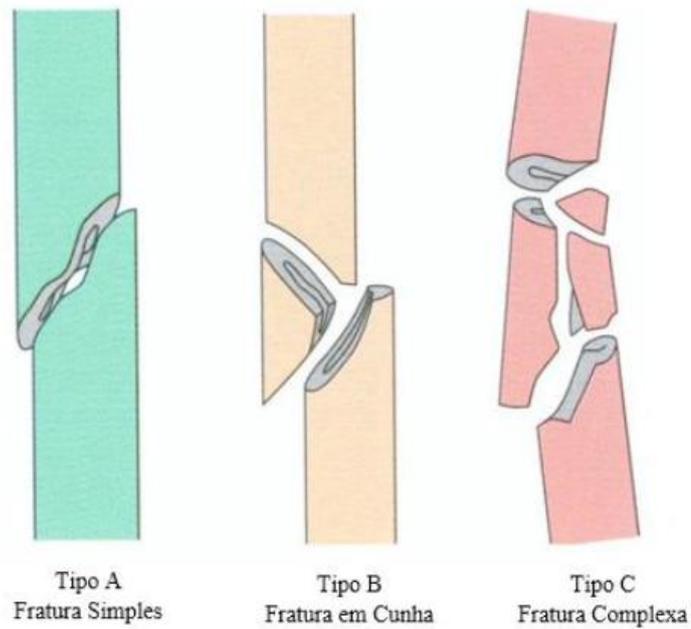
As fraturas em espiral (Fig. 5.d) são resultado de uma força de torção. Elas geralmente ocorrem em combinação com fragmentos de cunha em espiral (Fig. 5.e) de configuração correspondente. Esses fragmentos são maiores e retêm as ligações de seus tecidos moles. [10]



**FIGURA 5:** Tipos de fraturas [10]

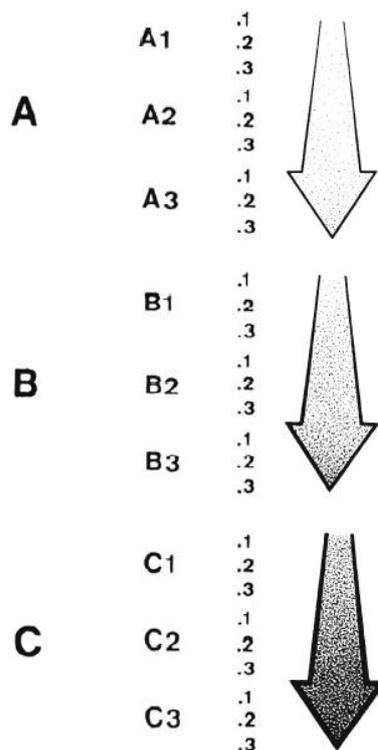
A Classificação das fraturas em ossos longos, desenvolvida pelo autor Maurice E. Muller [11], tem sido adotada como sistema de classificação pelas associações Arbeitsgemeinschaft für Osteosynthesefragen/Association for the Study of Internal Fixation (AO/ASIF) e Orthopedic Trauma Association (OTA), que são organizações que se dedicam a melhorias nos tratamentos de pacientes com lesões musculoesqueléticas. [10]

A Classificação das fraturas em ossos longos divide os tipos de fratura em A, B, C de acordo com a ordem crescente de severidade. Quando se tem uma fratura simples, designa-se do tipo A; fraturas em cunha são designadas tipo B; e fraturas complexas, do tipo C (Fig. 6). [2] [8] [11]



**FIGURA 6:** Classificação de fraturas [8]

Cada tipo de fratura tem três grupos: A1, A2, A3; B1, B2, B3; C1, C2, C3; e cada grupo tem três subgrupos: A1.1, A1.2, A1.3, e assim por diante. Toda a classificação se dá em ordem crescente de severidade da fratura (Fig. 7 e Tabela 1). [8] [11]



**FIGURA 7:** Ordem de severidade da fratura [10]

**TABELA 1:** Classificação das fraturas [8]

<b>TIPOS DE FRATURA</b>	<b>CONFIGURAÇÃO DA FRATURA</b>
A1	Simple Espiral
A2	Simple Oblíqua ( $\geq 30^\circ$ )
A3	Simple Transversa ( $< 30^\circ$ )
B1	Cunha em Espiral
B2	Cunha em Curva
B3	Cunha Fragmentada
C1	Complexa em Espiral
C2	Complexa Segmentada
C3	Complexa Irregular (Cominutiva)

A subdivisão definitiva de cada grupo em subgrupos, em geral só é possível após a cirurgia, quando os detalhes mais exatos da fratura estiverem estabelecidos. [2] [8]

Com base na localização e no reconhecimento do tipo de fratura conforme a sua classificação, consegue-se dizer imediatamente o grau de severidade do dano e assim é possível dar um prognóstico e definir qual o melhor tratamento a ser realizado no paciente.

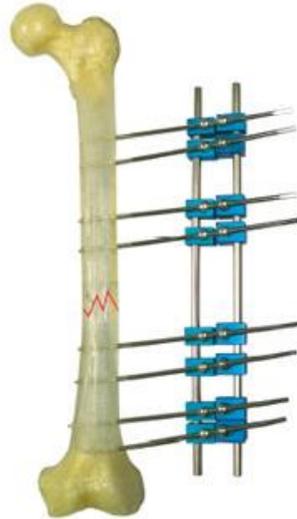
### **2.3. Métodos de correção das fraturas**

Atualmente existem diversos métodos para tratamento de fraturas em ossos longos, que visam manter o comprimento correto do osso e garantir o alinhamento axial dos fragmentos ósseos, de modo que se obtenha uma completa e rápida reabilitação do paciente. Dentre os métodos utilizados na correção de fraturas diafisárias estão os fixadores externos, parafusos de compressão, placas de osteossíntese e hastes intramedulares. A escolha do método a ser utilizado é influenciada por diversos fatores como: localização e configuração da fratura, tamanho do canal medular, condições do paciente, experiência do ortopedista, entre outros. [8] [2]

#### **2.3.1. Fixadores externos**

Os fixadores externos (Fig. 8) são os dispositivos de fixação mais versáteis, pois possibilitam diversos tipos de montagens e configurações, podendo ser colocados rapidamente e de forma percutânea. Quando utilizados por longos períodos apresentam altos índices de

infecção nos trajetos dos pinos, perda da redução, retardo de consolidação e consequente necessidade de enxertia óssea. [12]



**FIGURA 8:** Fixador externo [13]

### 2.3.2. Parafusos de compressão

Os parafusos de compressão (Fig. 9) são utilizados em processos de consolidação primária, processo com o contato direto entre os segmentos fraturados. Eles criam um ambiente de estabilidade absoluta onde não existe qualquer movimento relativo entre os fragmentos ósseos. Este é o mais simples e eficiente método em uso que garante a compressão interfragmentária. [14]

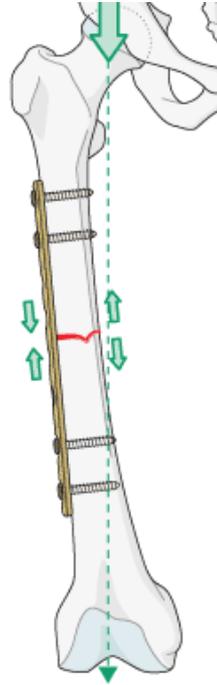


**FIGURA 9:** Parafuso de compressão [14]

### 2.3.3. Placas de osteossíntese (placas em ponte)

As placas de osteossíntese (Fig. 10) são utilizadas como método de fixação que promove uma estabilidade relativa, servindo como um tutor extra-medular [12]. Essas placas

compartilham com o osso fraturado o carregamento no qual este está submetido, auxiliando a consolidação da fratura [15], e são fabricadas em aço inox ou liga de titânio.



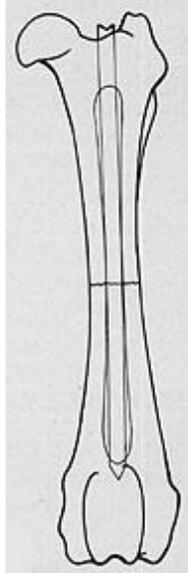
**FIGURA 10:** Placa de osteossíntese [16]

### **2.3.4. Hastes intramedulares**

Existem diversos tipos de hastes intramedulares, as quais podem ser divididas devido à presença ou não de bloqueio, flexibilidade e de necessitarem ou não de fresagem prévia. [12]

#### **2.3.4.1. Hastes de Küntscher**

As hastes de Küntscher (Fig. 11) são hastes não bloqueadas e apresentam algumas restrições de aplicação devido a estabilização de certos tipos de fraturas depender do contato direto entre a haste e o osso. Com a realização da fresagem do canal medular, aumenta-se esse contato e essas reduções são atenuadas, estendendo assim a utilização dessas hastes a fraturas mais complexas ou mais proximais e distais na diáfise. [8]



**FIGURA 11:** Haste de Küntcher [17]

#### **2.3.4.2. Hastes flexíveis**

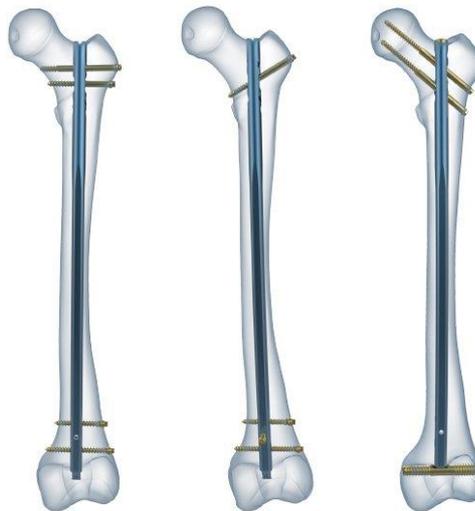
As hastes flexíveis (Fig. 12) possuem diâmetros reduzidos e elevada flexibilidade, são indicadas no tratamento de fraturas diafisárias em osso imaturo e, como não necessitam de bloqueio ou fresagem prévia, possuem baixos índices de infecção. Apresentam encaixe livre e não podem ser bloqueadas devido ao seu reduzido diâmetro. Esse tipo de haste está cada dia mais em desuso. [8]



**FIGURA 12:** Haste flexível [18]

### 2.3.4.3. Hastes bloqueadas (com ou sem fresagem)

As hastes bloqueadas (Fig. 13) são aquelas que apresentam um sistema de bloqueio através de parafusos cirúrgicos que permitem sua fixação nas regiões proximais e distais. Geralmente possuem corpo cilíndrico com quatro orifícios para fixação dos parafusos, sendo recomendada a utilização dos quatro para garantir uma maior resistência mecânica e, podem ou não ter fresagem prévia. Devido à fixação, estas hastes são capazes de controlar a rotação e ou encurtamento das fraturas cominutivas, diferentemente das hastes de Küntscher e flexíveis que precisariam de estabilizadores externos. A fixação da haste acarreta numa melhora das propriedades mecânicas o que faz com que esse método se torne o mais utilizado atualmente no tratamento de fraturas dos ossos longos, pois possibilita a reabilitação mais precoce. [8] [2] [12] Esse tipo de haste é fabricada em aço inox ou liga de titânio e, é o objeto de estudo deste trabalho de fim de curso.



**FIGURA 13:** Haste bloqueada com combinações de fixação variadas [18]

## 2.4. Revisão dos conceitos para a análise de tensões

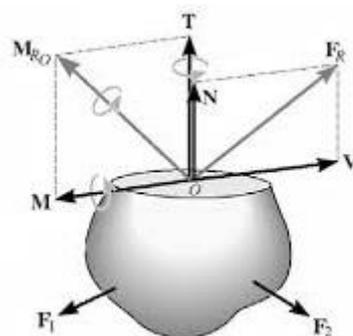
A Resistência dos materiais é um estudo da relação entre as cargas externas que agem sobre um corpo e a distribuição de tensões provocada pelas cargas internas no interior desse corpo. Essas cargas externas podem ser aplicadas como forças de superfície distribuídas ou concentradas, causadas pelo contato direto de um corpo com a superfície de outro, ou como forças de corpo, desenvolvido quando um corpo exerce uma força sobre outro sem que haja um contato físico direto entre eles [21]. Os conceitos que se seguem são ferramentas básicas para

o entendimento do modelo analítico que dá suporte a discussão do presente trabalho de fim de curso.

### 2.4.1. Forças

Para obter as cargas internas que agem sobre uma região específica de um corpo é necessário a utilização do método das seções, no qual realiza-se um corte imaginário passando pela região onde as cargas internas deverão ser determinadas, que divide o corpo em duas partes e permite, através da construção do diagrama de corpo livre de uma destas partes e, da aplicação das condições de equilíbrio, obter a visualização da distribuição das cargas internas.

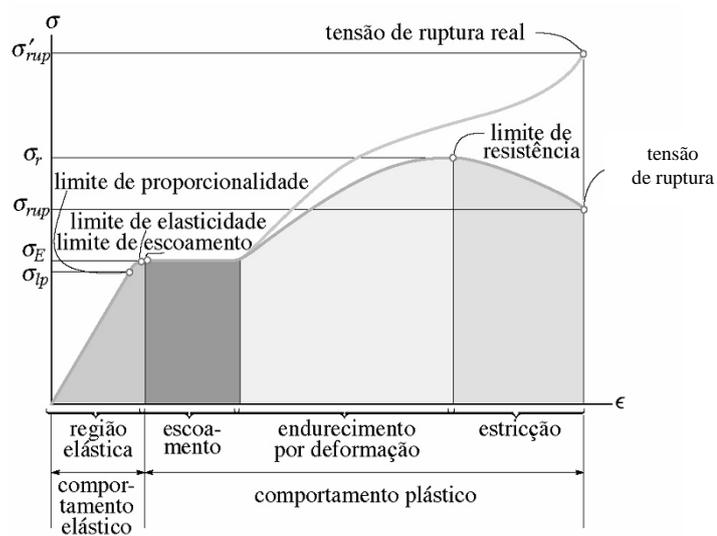
As equações de equilíbrio que relacionam as forças externas agindo sobre o corpo, com força e momento resultantes da distribuição,  $\mathbf{F}_R$  e  $\mathbf{M}_{RO}$ , em qualquer ponto específico na área seccionada, podem ser utilizadas. As componentes de  $\mathbf{F}_R$  e  $\mathbf{M}_{RO}$ , que agem na área seccionada são de quatro tipos diferentes: força normal ( $\mathbf{N}$ ), força de cisalhamento ( $\mathbf{V}$ ), momento de torção ou torque ( $\mathbf{T}$ ) e momento fletor ( $\mathbf{M}$ ) (Fig.14). [19]



**FIGURA 14:** Cargas internas [19]

### 2.4.2. Propriedades mecânicas

Na engenharia existe um diagrama importante por proporcionar um meio de obter dados sobre a resistência à tração ou à compressão de um material sem considerar o tamanho ou forma deste, é o denominado diagrama tensão-deformação (Fig. 15), que é obtido através de um ensaio mecânico realizado com um corpo de prova com dimensões padronizadas constituído do material que se deseja obter os dados.

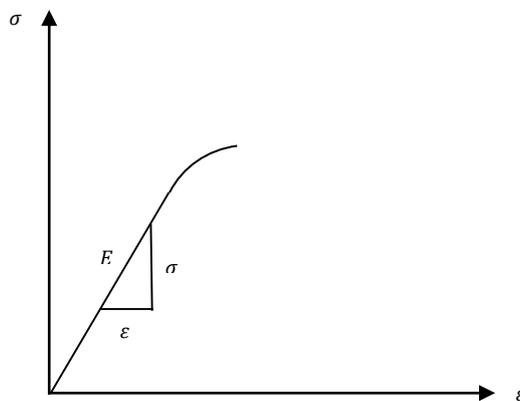


**FIGURA 15:** Diagrama tensão-deformação do aço [19]

Nesse diagrama observa-se que o material possui dois comportamentos: comportamento elástico, onde a deformação é reversível, e comportamento plástico, onde a deformação é permanente. A maioria dos materiais de engenharia exibem uma relação linear entre a tensão e a deformação dentro da região elástica [19], que é matematicamente representada pela Lei de Hooke:

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (2.1)$$

Na equação 2.1, o  $E$  é denominado módulo de elasticidade ou módulo de Young e no diagrama tensão-deformação representa a inclinação da reta (Fig. 16) e  $\epsilon$  representa a deformação. [19]

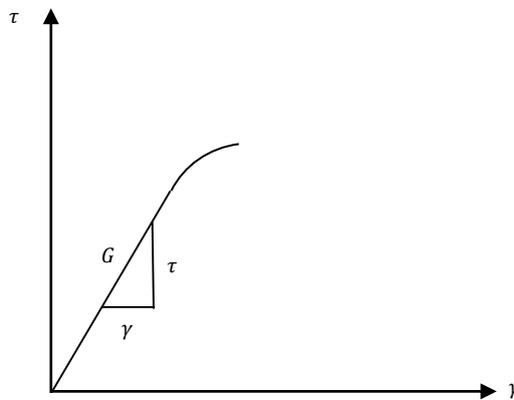


**FIGURA 16:** Módulo de elasticidade [19]

Diagramas de tensão de cisalhamento em relação à deformação por cisalhamento também são estabelecidos para um material, a Lei de Hooke nesse caso é representada por:

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (2.2)$$

Na equação 2.2,  $G$  é denominado módulo de elasticidade ao cisalhamento ou módulo de rigidez e, analogamente ao módulo de Young, também representa a inclinação da reta no diagrama (Fig. 17) e  $\gamma$  representa a deformação por cisalhamento. [19]



**FIGURA 17:** Módulo de elasticidade ao cisalhamento [19]

Valores comuns de  $E$  e  $G$  dos materiais são encontrados em normas de engenharia e manuais de referência, sendo que  $G$  pode ser obtido alternativamente através da equação 2.3, caso os valores do módulo de elasticidade  $E$  e do coeficiente de Poisson  $\nu$  sejam conhecidos. [19]

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.3)$$

### 2.4.3. Tensões

Denomina-se tensão a intensidade da força interna sobre um plano específico (área) que passa por um ponto em um corpo qualquer analisado. [19] Como será apresentado a seguir, as tensões são denominadas, de acordo com o tipo de força interna que está sendo relacionada, como: axial, de flexão, de cisalhamento ou torsora.

### 2.4.3.1. Tensão axial

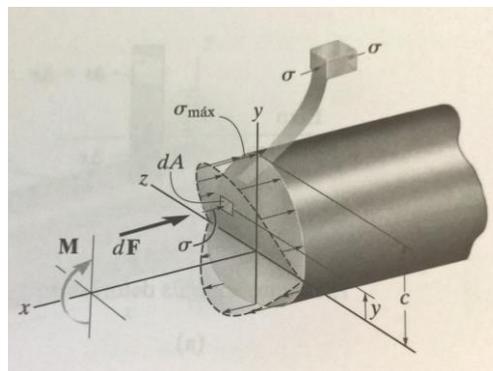
A tensão axial está relacionada a força normal  $P$  aplicada no centroide da área da seção transversal e pode ser calculada através da equação 2.4. O valor dessa tensão será positivo, caso o corpo estiver sendo submetido a um esforço de tração, e será negativo, caso esteja sendo submetido a um esforço de compressão. [19]

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (2.4)$$

Na equação 2.4,  $P$  representa a força axial interna e  $A$  representa a área da seção transversal analisada.

### 2.4.3.2. Tensão de flexão

A seção transversal de uma viga reta permanece plana quando a viga se deforma por flexão. Isso provoca tensões de tração de um lado da viga, de compressão do outro lado e nula no eixo neutro (Fig. 18). [19]



**FIGURA 18:** Variação da tensão de flexão [19]

A tensão de flexão poderá ser calculada através da equação 2.5, caso o material do corpo analisado seja homogêneo e a Lei de Hooke se aplique.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \quad (2.5)$$

Na equação 2.5,  $M$  representa o momento fletor,  $I$  o momento de inércia da área e  $c$  a distância perpendicular do eixo neutro a um ponto mais afastado deste eixo onde  $\sigma_{máximo}$  age. Ambos serão calculados em relação a esse eixo neutro que passa pelo centróide da seção transversal.

### 2.4.3.3. Tensão de cisalhamento

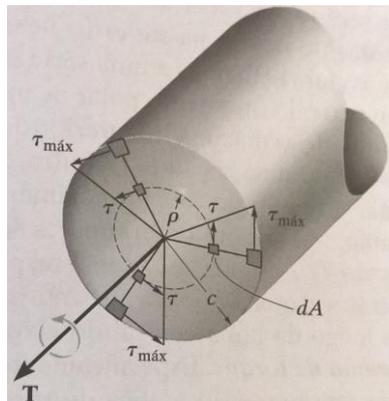
A tensão de cisalhamento desenvolvida em uma viga é representada pela equação 2.6.

$$\tau = \frac{VQ}{It} \quad (2.6)$$

Na equação 2.6,  $V$  é a força de cisalhamento interna,  $Q$  representa o momento de primeira ordem da seção transversal do elemento analisado,  $I$  é o momento de inércia da área da seção transversal inteira calculada em torno do eixo neutro e,  $t$  é a largura da área da seção transversal do elemento medida no ponto onde  $\tau$  deve ser determinada.

### 2.4.3.4. Torção

Em um eixo com seção transversal circular, o torque provoca torção de modo que a deformação por cisalhamento no eixo é proporcional à sua distância radial do centro do eixo (Fig. 19). Contanto que o material seja homogêneo e a Lei de Hooke (Equação 2.2) se aplique, a tensão de cisalhamento nesse caso será determinada pela equação 2.12.



**FIGURA 19:** Variação linear da tensão de cisalhamento num eixo de seção circular [19]

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \quad (2.7)$$

Na equação 2.7,  $T$  representa o torque aplicado,  $\rho$  a distância do centro até uma posição intermediária e  $J$  o momento polar de inércia da área da seção transversal.

O ângulo de torção de um eixo circular ( $\phi$ ) é determinado através da equação 2.8, ou pela equação 2.9, caso o  $T$ , o  $J$  e o  $G$  mudem abruptamente em cada trecho analisado.

$$\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{JG} \quad (2.8)$$

$$\phi = \sum \frac{TL}{JG} \quad (2.9)$$

#### 2.4.3.5. Tensões principais

As tensões principais, máxima e mínima atuantes, podem ser determinadas através da equação 2.10. [19]

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + (\tau_{xy})^2} \quad (2.10)$$

Na equação 2.10,  $\sigma_x$  representa a tensão na direção  $x$  do elemento,  $\sigma_y$  representa a tensão na direção  $y$  do elemento e  $\tau_{xy}$  a tensão de cisalhamento no elemento analisado.

#### 2.4.3.6. Critério de von Mises

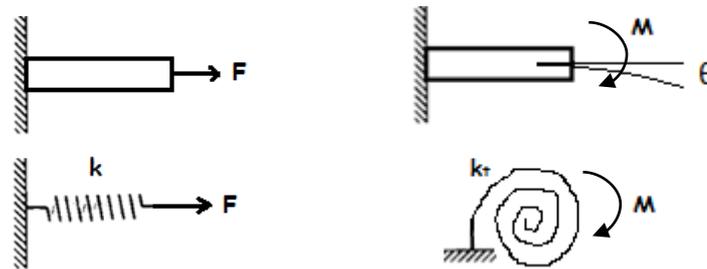
O critério de falha de von Mises diz que a tensão equivalente de von Mises ( $\sigma_{VM}$ ) deve ser menor ou igual a tensão admissível do material analisado e, que ela é determinada através da equação 2.11 para o caso bi-axial de tensões não principais. Este é o critério de falha mais utilizado em materiais dúcteis devido a se correlacionar melhor com os dados experimentais. [20]

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (2.11)$$

Na equação 2.11,  $\sigma_x$  representa a tensão na direção  $x$  do elemento,  $\sigma_y$  a tensão na direção  $y$  do elemento e  $\tau_{xy}$  a tensão de cisalhamento no elemento analisado.

#### 2.4.4. Rigidez

Uma viga submetida a um carregamento pode ser representada como uma mola (Figura 20) e assim, pode-se calcular a sua rigidez através da aplicação das Equações 2.12 e 2.13, dependendo do tipo de carregamento. [21]



**FIGURA 20:** Comparação viga-mola. [21]

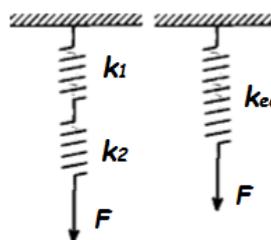
$$F = kx \quad (2.12)$$

$$M = k_t\theta \quad (2.13)$$

Nas equações 2.12 e 2.13,  $F$  representa a força,  $M$  o momento,  $k$  e  $k_t$  as rigidezes,  $x$  o alongamento sofrido devido a aplicação de uma força e  $\theta$  o deslocamento angular devido a aplicação de um momento. [21]

No caso de vigas, assim como em um sistema de molas, calcula-se a rigidez equivalente para as associações em série (Fig. 21) e em paralelo (Fig. 22) através das equações 2.14 e 2.15, respectivamente, como mostrado a seguir:

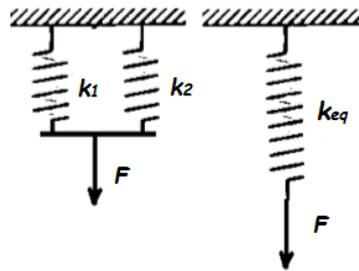
- a) Associação em série



**FIGURA 21:** Associação de molas em série. [21]

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad (2.14)$$

b) Associação em paralelo



**FIGURA 22:** Associação de molas em paralelo [21]

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \quad (2.15)$$

### 2.4.5. Modelagem

Nas últimas décadas observou-se uma intensificação do uso da informática na Engenharia, através de diversos softwares que auxiliam a elaboração de desenhos técnicos e modelos matemáticos complexos.

Na elaboração deste projeto em questão optou-se pela utilização do software Mathcad 15.0 como suporte no desenvolvimento do modelo analítico.

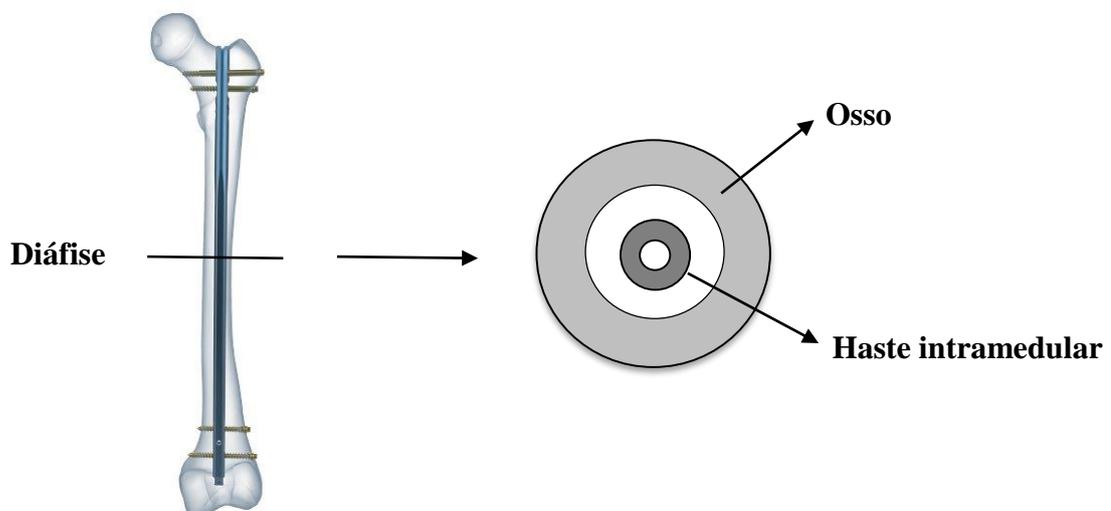
## Capítulo 3

### Metodologia

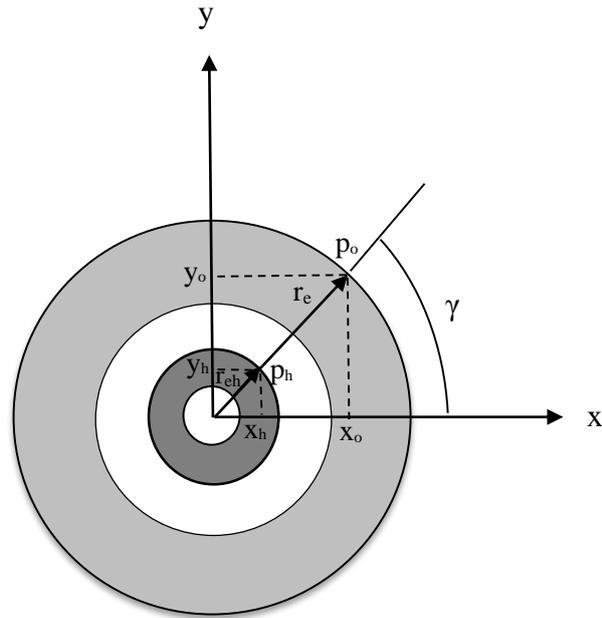
Neste capítulo é descrita a metodologia utilizada na construção do modelo para análise das tensões da haste intramedular.

#### 3.1. Modelo analítico

Para a construção do modelo analítico, foram feitas as seguintes considerações: o conjunto osso-haste intramedular é tratado como uma coluna engastada nas duas extremidades, e portanto, os parafusos fixados tanto na epífise proximal, quanto na distal foram considerados como engastes; as seções transversais do osso e da haste são circulares; tanto o material do osso quanto o da haste são isotrópicos; a região definida para análise foi a diáfise femoral (Fig. 23) que apresenta situações críticas de fraturas e composição predominante de osso cortical que, em suas propriedades mecânicas, apresenta módulo de elasticidade  $E = 20$  GPa e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,236$ ; o material da haste é aço inox com  $E = 190$  GPa e  $\nu = 0,3$  ou liga de titânio com  $E = 114$  GPa e  $\nu = 0,3$  [20]; serão analisados todos os pontos externos das regiões circulares da haste e do osso da seção transversal da região escolhida para análise (Fig. 24).



**FIGURA 23:** Região escolhida para a análise [18]



**FIGURA 24:** Pontos de análise

Os valores das coordenadas  $x$  e  $y$  de cada ponto  $p$  das circunferências externas do osso e da haste analisado estão vinculados ao ângulo  $\gamma$ , que varia de  $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ . Utilizando relações trigonométricas de seno e cosseno é possível determinar as coordenadas de cada ponto.

### 3.1.1. Forças externas

No modelo adotado existem quatro forças estáticas externas sendo aplicadas na cabeça do fêmur (Fig. 25): Reação da junta, Adutora, Iliopsoas e Trato Iliotibial. [22]



**FIGURA 25:** Forças atuantes na cabeça do fêmur [15]

Essas forças e suas distâncias até a seção transversal de análise podem ser representadas na forma vetorial através das equações 3.1 e 3.2, respectivamente.

$$\mathbf{P}_n = P_{n,x}\vec{i} + P_{n,y}\vec{j} + P_{n,z}\vec{k} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{d}_n = d_{n,x}\vec{i} + d_{n,y}\vec{j} + d_{n,z}\vec{k} \quad (3.2)$$

Sendo “n” uma variável de 1 a 4 que representa cada uma das forças apresentadas anteriormente e as letras em negritos representam vetores.

### 3.1.2. Forças e momentos internos

As forças na cabeça do fêmur se transformam em forças e momentos internos na seção transversal diafisária analisada através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} V_{n,x} &= P_{n,x} \\ V_{n,y} &= P_{n,y} \\ V_{n,z} &= P_{n,z} \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} V_{n,x} \\ V_{n,y} \\ V_{n,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{n,x} \\ P_{n,y} \\ P_{n,z} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} M_{n,x} &= d_{n,y}P_{n,z} - d_{n,z}P_{n,y} \\ M_{n,y} &= d_{n,z}P_{n,x} - d_{n,x}P_{n,z} \\ M_{n,z} &= d_{n,x}P_{n,y} - d_{n,y}P_{n,x} \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} M_{n,x} \\ M_{n,y} \\ M_{n,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{n,y}P_{n,z} - d_{n,z}P_{n,y} \\ d_{n,z}P_{n,x} - d_{n,x}P_{n,z} \\ d_{n,x}P_{n,y} - d_{n,y}P_{n,x} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Sabendo que as forças aplicadas dividem-se entre o conjunto osso (o) e haste (h), tem-se que cada componente x, y e z das forças e dos momentos internos:

$$\begin{aligned} V_{n,x} &= V_{n,x}^o + V_{n,x}^h \\ V_{n,y} &= V_{n,y}^o + V_{n,y}^h \\ V_{n,z} &= V_{n,z}^o + V_{n,z}^h \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} V_{n,x} \\ V_{n,y} \\ V_{n,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{n,x}^o + V_{n,x}^h \\ V_{n,y}^o + V_{n,y}^h \\ V_{n,z}^o + V_{n,z}^h \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} M_{n,x} &= M_{n,x}^o + M_{n,x}^h \\ M_{n,y} &= M_{n,y}^o + M_{n,y}^h \\ M_{n,z} &= M_{n,z}^o + M_{n,z}^h \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} M_{n,x} \\ M_{n,y} \\ M_{n,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n,x}^o + M_{n,x}^h \\ M_{n,y}^o + M_{n,y}^h \\ M_{n,z}^o + M_{n,z}^h \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

As contribuições das forças internas e momentos internos na seção transversal diafisária analisada são resumidamente escritas da seguinte forma:

$$V_x = \sum_n V_{n,x} \quad V_y = \sum_n V_{n,y} \quad V_z = \sum_n V_{n,z} \quad (3.7)$$

$$M_x = \sum_n M_{n,x} \quad M_y = \sum_n M_{n,y} \quad M_z = \sum_n M_{n,z} \quad (3.8)$$

Em que,  $V_x$  e  $V_y$  correspondem, respectivamente, aos somatórios das forças de cisalhamento transversal nas direções x e y;  $V_z$  representa a soma das forças normais;  $M_x$  e  $M_y$  correspondem, respectivamente, aos somatórios dos momentos fletores em relação a x e y; e  $M_z$  representa a soma dos torques, ambos no centroide da seção transversal diafisária analisada.

### 3.1.3. Rigidezes

Com o intuito de quantificar o quanto de cada carga é resistida pelo osso e pela haste explicitam-se as rigidezes conforme demonstrado a seguir:

- Para o carregamento axial:

$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \frac{F}{A} = E \frac{\delta}{L} \rightarrow F = \left(\frac{AE}{L}\right) \delta \quad (3.9)$$

$$k_a = \frac{AE}{L} \quad (3.10)$$

Em que,  $\sigma$  representa a tensão axial,  $F$  a força axial interna,  $A$  a área da seção transversal analisada,  $L$  a distância do ponto de aplicação da força externa até a o centroide da região analisada e  $k_a$  a rigidez referente ao carregamento axial.

- Para o carregamento fletor:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \rightarrow \frac{\theta}{L} = \frac{M}{EI} \rightarrow M = \left(\frac{EI}{L}\right) \theta \quad (3.11)$$

$$k_f = \frac{EI}{L} \quad (3.12)$$

Em que,  $\rho$  representa o raio de curvatura,  $\theta$  o ângulo de deflexão,  $L$  a distância do ponto de aplicação da força externa até o centroide da região analisada e  $k_f$  a rigidez referente ao carregamento fletor.

- Para o carregamento torsor:

$$\phi = \frac{TL}{JG} \rightarrow T = \left(\frac{JG}{L}\right) \phi \quad (3.13)$$

$$k_t = \frac{JG}{L} \quad (3.14)$$

Em que,  $\phi$  representa o ângulo de torção,  $L$  a distância do ponto de aplicação da força externa até o centroide da região analisada,  $J$  o momento polar de inércia de área,  $G$  o módulo de elasticidade ao cisalhamento e  $k_t$  a rigidez referente ao carregamento torsor.

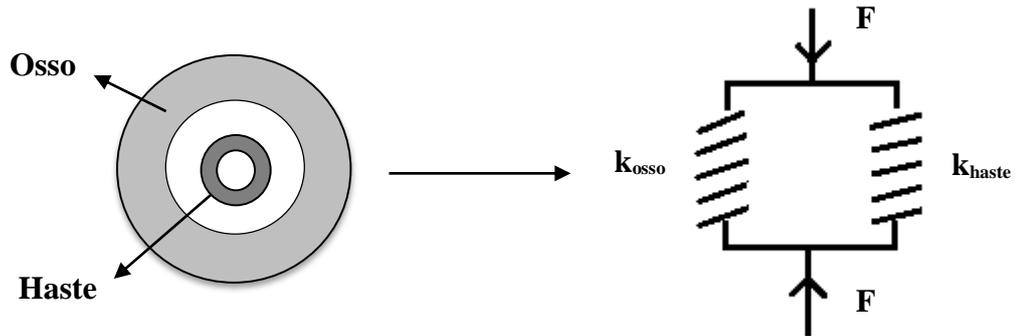
A Tabela 1 apresenta resumidamente as equações obtidas para as rigidezes relativas ao osso e à haste intramedular:

**Tabela 1:** Rigidezes do osso e da haste intramedular.

	Osso	Haste intramedular
Axial	$k_a^o = \left(\frac{E^o A^o}{L}\right)$	$k_a^h = \left(\frac{E^h A^h}{L}\right)$
Fletor em relação ao eixo x	$k_{fx}^o = \left(\frac{E^o I_x^o}{L}\right)$	$k_{fx}^h = \left(\frac{E^h I_x^h}{L}\right)$
Fletor em relação ao eixo y	$k_{fy}^o = \left(\frac{E^o I_y^o}{L}\right)$	$k_{fy}^h = \left(\frac{E^h I_y^h}{L}\right)$
Torsor	$k_t^o = \left(\frac{J^o G^o}{L}\right)$	$k_t^h = \left(\frac{J^h G^h}{L}\right)$

As equações das áreas, dos momentos de inércia de área e dos momentos polares de inércia de área estão disponíveis na Tabela A1 do apêndice A.

Como pode-se observar, o conjunto osso-haste é uma composição concêntrica e, pode-se afirmar que o conjunto se comporta como um mecanismo de molas em paralelo (Fig. 26) cuja rigidez equivalente é calculada através da Equação 3.15.



**FIGURA 26:** Associação em paralelo conjunto osso-haste intramedular

$$k_{eq} = k^{osso} + k^{haste} \quad (3.15)$$

A Tabela 2 apresenta as rigidezes equivalentes correspondentes aos esforços axial, fletor e torsor:

**TABELA 2:** Rigidezes equivalentes

Axial	$k_a^{eq} = k_a^o + k_a^h$
Fletor em relação ao eixo x	$k_{fx}^{eq} = k_{fx}^o + k_{fx}^h$
Fletor em relação ao eixo y	$k_{fy}^{eq} = k_{fy}^o + k_{fy}^h$
Torsor	$k_t^{eq} = k_t^o + k_t^h$

### 3.1.4. Quantificação dos carregamentos através das rigidezes

Pode-se afirmar que o conjunto osso-haste intramedular se comporta como um mecanismo de molas em paralelo, ou seja, os deslocamentos linear e angular provocados na

haste, devido a aplicação respectivamente das forças e dos momentos, serão iguais aos deslocamentos provocados no osso. Com isso, tem-se:

- Para o carregamento axial:

$$V_z = V_z^o + V_z^h \quad (3.16)$$

$$V_z^h = \left( \frac{k_a^h}{k_a^{eq}} \right) V_z \quad e \quad V_z^o = \left( \frac{k_a^o}{k_a^{eq}} \right) V_z \quad (3.17)$$

- Para o carregamento fletor em relação ao eixo x:

$$M_x = M_x^o + M_x^h \quad (3.18)$$

$$M_x^h = \left( \frac{k_{fx}^h}{k_{fx}^{eq}} \right) M_x \quad e \quad M_x^o = \left( \frac{k_{fx}^o}{k_{fx}^{eq}} \right) M_x \quad (3.19)$$

- Para o carregamento fletor em relação ao eixo y:

$$M_y = M_y^o + M_y^h \quad (3.20)$$

$$M_y^h = \left( \frac{k_{fy}^h}{k_{fy}^{eq}} \right) M_y \quad e \quad M_y^o = \left( \frac{k_{fy}^o}{k_{fy}^{eq}} \right) M_y \quad (3.21)$$

- Para o carregamento cortante paralelo ao eixo x:

$$V_x = V_x^o + V_x^h \quad (3.22)$$

$$V_x^h = \left( \frac{k_{fy}^h}{k_{fy}^{eq}} \right) V_x \quad e \quad V_x^o = \left( \frac{k_{fy}^o}{k_{fy}^{eq}} \right) V_x \quad (3.23)$$

- Para o carregamento cortante paralelo ao eixo y:

$$V_y = V_y^o + V_y^h \quad (3.24)$$

$$V_y^h = \left( \frac{k_{fx}^h}{k_{fx}^{eq}} \right) V_y \quad e \quad V_y^o = \left( \frac{k_{fx}^o}{k_{fx}^{eq}} \right) V_y \quad (3.25)$$

- Para o carregamento torsor:

$$M_z = M_z^o + M_z^h \quad (3.26)$$

$$M_z^h = \left( \frac{k_t^h}{k_t^{eq}} \right) M_z \quad e \quad M_z^o = \left( \frac{k_t^o}{k_t^{eq}} \right) M_z \quad (3.27)$$

A Tabela 3 apresenta resumidamente as equações das forças e momentos internos em função das rigidezes:

**TABELA 3:** Resumo das forças e momentos internos em função das rigidezes

	Osso	Haste intramedular
Axial	$V_z^o = \left( \frac{k_a^o}{k_a^{eq}} \right) V_z$	$V_z^h = \left( \frac{k_a^h}{k_a^{eq}} \right) V_z$
Cortante paralelo ao eixo x	$V_x^o = \left( \frac{k_{fy}^o}{k_{fy}^{eq}} \right) V_x$	$V_x^h = \left( \frac{k_{fy}^h}{k_{fy}^{eq}} \right) V_x$
Cortante paralelo ao eixo y	$V_y^o = \left( \frac{k_{fx}^o}{k_{fx}^{eq}} \right) V_y$	$V_y^h = \left( \frac{k_{fx}^h}{k_{fx}^{eq}} \right) V_y$
Fletor em relação ao eixo x	$M_x^o = \left( \frac{k_{fx}^o}{k_{fx}^{eq}} \right) M_x$	$M_x^h = \left( \frac{k_{fx}^h}{k_{fx}^{eq}} \right) M_x$
Fletor em relação ao eixo y	$M_y^o = \left( \frac{k_{fy}^o}{k_{fy}^{eq}} \right) M_y$	$M_y^h = \left( \frac{k_{fy}^h}{k_{fy}^{eq}} \right) M_y$
Torsor	$M_z^o = \left( \frac{k_t^o}{k_t^{eq}} \right) M_z$	$M_z^h = \left( \frac{k_t^h}{k_t^{eq}} \right) M_z$

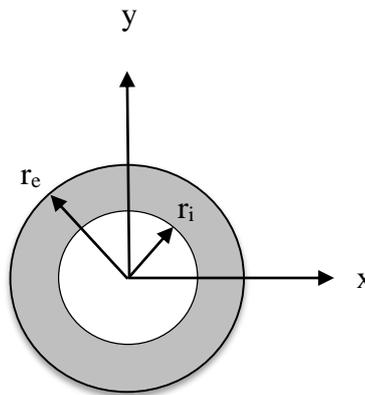
Observa-se que quando as equações da Tabela 3 são aplicadas, as distâncias  $L$ , presentes nas equações das rigidezes apresentadas anteriormente na Tabela 1 são canceladas.

### 3.1.5. Situações analisadas

No equacionamento das tensões optou-se pelo desenvolvimento dos cálculos em três diferentes situações, para que, posteriormente, fosse possível comparar o comportamento das distribuições de tensões durante o processo de recuperação fêmur. Conforme será descrito a seguir, consideraram-se as seguintes situações: apenas o osso (AO), apenas a haste (AH) e haste e osso (HO).

#### 3.1.5.1. Apenas o osso (AO)

Essa situação corresponde ao momento antes da fratura, onde o osso é responsável por suportar todo o carregamento. A representação da seção transversal analisada nesse caso é mostrada na Fig. 27.



**FIGURA 27:** Seção transversal do fêmur na região diafisária.

Nessa situação a fratura ainda não ocorreu, a haste não foi implantada no canal medular do fêmur e o osso resiste a todo o carregamento sozinho, portanto, os termos das forças e momentos internos referentes à haste no equacionamento são nulos:

$$V_{n,x}^h = V_{n,y}^h = V_{n,z}^h = M_{n,x}^h = M_{n,y}^h = M_{n,z}^h = 0 \quad (3.28)$$

Assim sendo, as equações 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 tornam-se:

$$\begin{aligned} V_{n,x} &= V_{n,x}^o + V_{n,x}^h & V_{n,x} &= V_{n,x}^o + 0 & V_{n,x} &= V_{n,x}^o \\ V_{n,y} &= V_{n,y}^o + V_{n,y}^h & \rightarrow V_{n,y} &= V_{n,y}^o + 0 & \rightarrow V_{n,y} &= V_{n,y}^o \\ V_{n,z} &= V_{n,z}^o + V_{n,z}^h & V_{n,z} &= V_{n,z}^o + 0 & V_{n,z} &= V_{n,z}^o \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$V_x = V_x^{AO} = \sum_{n=1}^4 V_{n,x}^o \quad V_y = V_y^{AO} = \sum_{n=1}^4 V_{n,y}^o \quad V_z = V_z^{AO} = \sum_{n=1}^4 V_{n,z}^o \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} M_{n,x} &= M_{n,x}^o + M_{n,x}^h & M_{n,x} &= M_{n,x}^o + 0 & M_{n,x} &= M_{n,x}^o \\ M_{n,y} &= M_{n,y}^o + M_{n,y}^h & \rightarrow M_{n,y} &= M_{n,y}^o + 0 & \rightarrow M_{n,y} &= M_{n,y}^o \\ M_{n,z} &= M_{n,z}^o + M_{n,z}^h & M_{n,z} &= M_{n,z}^o + 0 & M_{n,z} &= M_{n,z}^o \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$M_x = M_x^{AO} = \sum_{n=1}^4 M_{n,x}^o \quad M_y = M_y^{AO} = \sum_{n=1}^4 M_{n,y}^o \quad M_z = M_z^{AO} = \sum_{n=1}^4 M_{n,z}^o \quad (3.32)$$

A tensão axial é dada pela força normal dividida pela área transversal do osso:

$$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow \sigma_{z\_axial}^{AO} = \frac{V_z^{AO}}{A^o} \quad (3.33)$$

As tensões de flexão são:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \rightarrow \sigma_{zx}^{AO} = \frac{M_x^{AO} y}{I_x^o} \quad \text{e} \quad \sigma_{zy}^{AO} = \frac{M_y^{AO} x}{I_y^o} \quad (3.34)$$

$$\sigma_{z\_flexão}^{AO}(x, y) = \frac{M_x^{AO} y}{I_x^o} - \frac{M_y^{AO} x}{I_y^o} \quad (3.35)$$

As tensões de cisalhamento transversais são:

$$\tau = \frac{VQ}{It} \rightarrow \tau_{zx}^{AO}(x) = \frac{V_x^{AO} Q_y^o(x)}{I_y^o t_y^o(x)} \quad \text{e} \quad \tau_{zy}^{AO}(y) = \frac{V_y^{AO} Q_x^o(y)}{I_x^o t_x^o(y)} \quad (3.36)$$

A torção é:

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \rightarrow \tau_{zz}^{AO}(\rho) = \frac{M_z^{AO} r_e}{J^o} \quad (3.37)$$

Realiza-se o cálculo das tensões principais para verificar os pontos da seção analisada em que o osso estará sendo submetido ao máximo e mínimo esforço:

$$\sigma_z^{AO}(x, y) = (\sigma_{z\_axial}^{AO} + \sigma_{z\_flexão}^{AO}(x, y)) \quad (3.38)$$

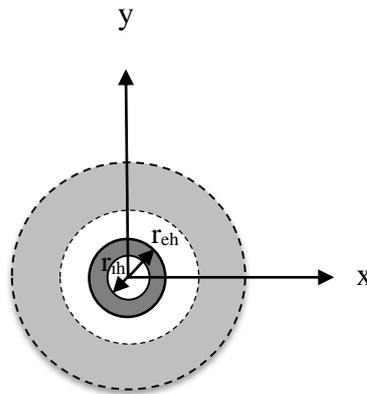
$$\tau^{AO}(x, y) = \tau_{zx}^{AO}(x) + \tau_{zy}^{AO}(y) + \tau_{zz}^{AO} \quad (3.39)$$

$$\sigma(\gamma)_{1,2} = \frac{\sigma_z^{AO}(x, y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z^{AO}(x, y)}{2}\right)^2 + (\tau^{AO}(x, y))^2} \quad (3.40)$$

As equações das áreas, dos momentos de inércia, momentos de área e dos momentos polares de inércia estão disponíveis na Tabela A1 do apêndice A.

### 3.1.5.2. Apenas a haste (AH)

Essa situação corresponde ao momento em que a haste intramedular é implantada e o osso está completamente fraturado. Nessa situação a haste é responsável por suportar todo o carregamento. A representação da seção transversal analisada nesse caso é mostrada na Fig. 28.



**FIGURA 28:** Seção transversal da haste intramedular na região diafisária

Nessa situação, a haste é implantada no canal medular do fêmur e o osso apresenta-se na fase inicial da fratura, portanto, os termos das forças e momentos internos referentes ao osso no equacionamento são nulos:

$$V_{n,x}^o = V_{n,y}^o = V_{n,z}^o = M_{n,x}^o = M_{n,y}^o = M_{n,z}^o = 0 \quad (3.41)$$

Assim sendo, as equações 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8 tornam-se:

$$\begin{aligned} V_{n,x} &= V_{n,x}^o + V_{n,x}^h & V_{n,x} &= 0 + V_{n,x}^h & V_{n,x} &= V_{n,x}^h \\ V_{n,y} &= V_{n,y}^o + V_{n,y}^h \rightarrow V_{n,y} &= 0 + V_{n,y}^h \rightarrow V_{n,y} &= V_{n,y}^h \\ V_{n,z} &= V_{n,z}^o + V_{n,z}^h & V_{n,z} &= 0 + V_{n,z}^h & V_{n,z} &= V_{n,z}^h \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$V_x = V_x^{AH} = \sum_{n=1}^4 V_{n,x}^h \quad V_y = V_y^{AH} = \sum_{n=1}^4 V_{n,y}^h \quad V_z = V_z^{AH} = \sum_{n=1}^4 V_{n,z}^h \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} M_{n,x} &= M_{n,x}^o + M_{n,x}^h & M_{n,x} &= 0 + M_{n,x}^h & M_{n,x} &= M_{n,x}^h \\ M_{n,y} &= M_{n,y}^o + M_{n,y}^h \rightarrow M_{n,y} &= 0 + M_{n,y}^h \rightarrow M_{n,y} &= M_{n,y}^h \\ M_{n,z} &= M_{n,z}^o + M_{n,z}^h & M_{n,z} &= 0 + M_{n,z}^h & M_{n,z} &= M_{n,z}^h \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$M_x = M_x^{AH} = \sum_{n=1}^4 M_{n,x}^h \quad M_y = M_y^{AH} = \sum_{n=1}^4 M_{n,y}^h \quad M_z = M_z^{AH} = \sum_{n=1}^4 M_{n,z}^h \quad (3.45)$$

A tensão axial é dada pela força normal dividida pela área transversal da haste:

$$\sigma = \frac{F}{A} \rightarrow \sigma_{z\_axial}^{AH} = \frac{V_z^{AH}}{A^h} \quad (3.46)$$

As tensões de flexão são:

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \rightarrow \sigma_{zx}^{AH} = \frac{M_x^{AH}y}{I_x^h} \quad \text{e} \quad \sigma_{zy}^{AH} = \frac{M_y^{AH}x}{I_y^h} \quad (3.47)$$

$$\sigma_{z\_flexão}^{AH}(x, y) = \frac{M_x^{AH}y}{I_x^h} - \frac{M_y^{AH}x}{I_y^h} \quad (3.48)$$

As tensões de cisalhamento transversais são:

$$\tau = \frac{VQ}{It} \rightarrow \tau_{zx}^{AH}(x) = \frac{V_x^{AH}Q_y^h(x)}{I_y^h t_y^h(x)} \quad \text{e} \quad \tau_{zy}^{AH}(y) = \frac{V_y^{AH}Q_x^h(y)}{I_x^h t_x^h(y)} \quad (3.49)$$

A torção é:

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \rightarrow \tau_{zz}^{AH}(\rho) = \frac{M_z^{AH}r_{eh}}{J^h} \quad (3.50)$$

Aplica-se o critério de von Mises na haste intramedular, a fim de verificar o ponto da seção analisada em que a haste estará sendo submetida ao máximo e mínimo esforço:

$$\sigma_z^{AH}(x, y) = (\sigma_{z\_axial}^{AH} + \sigma_{z\_flexão}^{AH}(x, y)) \quad (3.51)$$

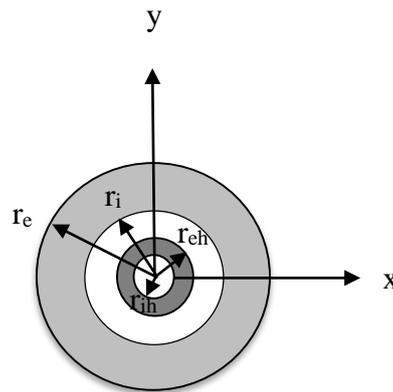
$$\tau^{AH}(x, y) = \tau_{zx}^{AH}(x) + \tau_{zy}^{AH}(y) + \tau_{zz}^{AH} \quad (3.52)$$

$$\sigma_{eq}^{AH} = \left( (\sigma_z^{AH}(x, y))^2 + 3(\tau^{AH}(x, y))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.53)$$

As equações das áreas, dos momentos de inércia, momentos de área e dos momentos polares de inércia estão disponíveis na Tabela A1 do apêndice A.

### 3.1.5.3. Haste e osso (HO)

Nessa situação, a haste está implantada no canal medular do fêmur e o osso já iniciou o processo de recuperação. A representação da seção transversal analisada nesse caso é mostrada na Fig. 29.



**FIGURA 29:** Seção transversal do conjunto haste-osso na região diafisária.

Na situação em questão tem-se a haste intramedular implantada e o processo de remodelação óssea ocorrendo. Portanto as tensões antes aplicadas apenas sobre a haste, devido

a ruptura óssea, agora se distribuem no conjunto osso-haste em decorrência da recuperação da resistência mecânica do osso cortical. Assim sendo, tem-se o seguinte equacionamento para essa situação:

$$\begin{aligned} V_{n,x} &= V_{n,x}^o + V_{n,x}^h \\ V_{n,y} &= V_{n,y}^o + V_{n,y}^h \\ V_{n,z} &= V_{n,z}^o + V_{n,z}^h \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} V_{n,x} \\ V_{n,y} \\ V_{n,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{n,x}^o + V_{n,x}^h \\ V_{n,y}^o + V_{n,y}^h \\ V_{n,z}^o + V_{n,z}^h \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

$$V_x = V_x^{HO} = V_x^o + V_x^h \quad V_y = V_y^{HO} = V_y^o + V_y^h \quad V_z = V_z^{HO} = V_z^o + V_z^h \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} M_{n,x} &= M_{n,x}^o + M_{n,x}^h \\ M_{n,y} &= M_{n,y}^o + M_{n,y}^h \\ M_{n,z} &= M_{n,z}^o + M_{n,z}^h \end{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} M_{n,x} \\ M_{n,y} \\ M_{n,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{n,x}^o + M_{n,x}^h \\ M_{n,y}^o + M_{n,y}^h \\ M_{n,z}^o + M_{n,z}^h \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

$$M_x = M_x^{HO} = M_x^o + M_x^h \quad M_y = M_y^{HO} = M_y^o + M_y^h \quad M_z = M_z^{HO} = M_z^o + M_z^h \quad (3.57)$$

Nessa situação as forças e momentos internos utilizados no cálculo das tensões da haste e do osso são os apresentados anteriormente na Tabela 3 do subitem 3.1.4 deste capítulo, que representam o quanto de cada força e momento está sendo fornecido a cada um desses elementos.

As tensões axiais são dadas pela força normal dividida pela área transversal:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{F}{A} \rightarrow \sigma_{z\_axial}^{HO\_osso} = \frac{V_z^o}{A^o} \\ \sigma_{z\_axial}^{HO\_haste} &= \frac{V_z^h}{A^h} \end{aligned} \quad (3.58)$$

As tensões de flexão são:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{Mc}{I} \rightarrow \sigma_{zx}^{HO\_osso} = \frac{M_{xy}^o}{I_x^o} \quad \sigma_{zy}^{HO\_osso} = \frac{M_{yx}^o}{I_y^o} \rightarrow \sigma_{z\_flexão}^{HO\_osso}(x,y) = \frac{M_{xy}^o}{I_x^o} - \frac{M_{yx}^o}{I_y^o} \\ \sigma_{zx}^{HO\_haste} &= \frac{M_{xy}^h}{I_x^h} \quad \sigma_{zy}^{HO\_haste} = \frac{M_{yx}^h}{I_y^h} \rightarrow \sigma_{z\_flexão}^{HO\_haste}(x,y) = \frac{M_{xy}^h}{I_x^h} - \frac{M_{yx}^h}{I_y^h} \end{aligned} \quad (3.59)$$

As tensões de cisalhamento transversais são:

$$\begin{aligned} \tau = \frac{VQ}{It} \rightarrow \tau_{zx}^{\text{HO_osso}}(x) &= \frac{V_x^o Q_y^o(x)}{I_y^o t_y^o(x)} & \tau_{zy}^{\text{HO_osso}}(y) &= \frac{V_y^o Q_x^o(y)}{I_x^o t_x^o(y)} \\ \tau_{zx}^{\text{HO_haste}}(x) &= \frac{V_x^h Q_y^h(x)}{I_y^h t_y^h(x)} & \tau_{zy}^{\text{HO_haste}}(y) &= \frac{V_y^h Q_x^h(y)}{I_x^h t_x^h(y)} \end{aligned} \quad (3.60)$$

As torções são:

$$\begin{aligned} \tau = \frac{T\rho}{J} \rightarrow \tau_{zz}^{\text{HO_osso}}(\rho) &= \frac{M_z^o r_e}{J^o} \\ \tau_{zz}^{\text{HO_haste}}(\rho) &= \frac{M_z^h r_{eh}}{J^h} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Aplica-se o critério de von Mises na haste intramedular, a fim de verificar o ponto da seção analisada em que a haste estará sendo submetida ao máximo esforço:

$$\sigma_z^{\text{HO_haste}}(x, y) = (\sigma_{z_{\text{axial}}}^{\text{HO_haste}} + \sigma_{z_{\text{flexão}}}^{\text{HO_haste}}(x, y)) \quad (3.62)$$

$$\tau^{\text{HO_haste}}(x, y) = \tau_{zx}^{\text{HO_haste}}(x) + \tau_{zy}^{\text{HO_haste}}(y) + \tau_{zz}^{\text{HO_haste}} \quad (3.63)$$

$$\sigma_{\text{eq}}^{\text{HO_haste}}(\gamma) = \left( \left( \sigma_z^{\text{HO_haste}}(x, y) \right)^2 + 3 \left( \tau^{\text{HO_haste}}(x, y) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.64)$$

Como o Critério de von Mises não poderá ser aplicado no osso, pois este não se comporta como um material dúctil, utiliza-se o cálculo das tensões principais para verificar os pontos da seção analisada em que o osso estará sendo submetido ao máximo e mínimo esforço:

$$\sigma_z^{\text{HO_osso}}(x, y) = (\sigma_{z_{\text{axial}}}^{\text{HO_osso}} + \sigma_{z_{\text{flexão}}}^{\text{HO_osso}}(x, y)) \quad (3.65)$$

$$\tau^{\text{HO_osso}}(x, y) = \tau_{zx}^{\text{HO_osso}}(x) + \tau_{zy}^{\text{HO_osso}}(y) + \tau_{zz}^{\text{HO_osso}} \quad (3.66)$$

$$\sigma(\gamma)_{1.2} = \frac{\sigma_z^{\text{HO_osso}}(x, y)}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_z^{\text{HO_osso}}(x, y)}{2} \right)^2 + \left( \tau^{\text{HO_osso}}(x, y) \right)^2} \quad (3.67)$$

As equações das áreas, dos momentos de inércia de área, momentos de primeira ordem e dos momentos polares de inércia de área estão disponíveis na Tabela A1 do apêndice A.

## Capítulo 4

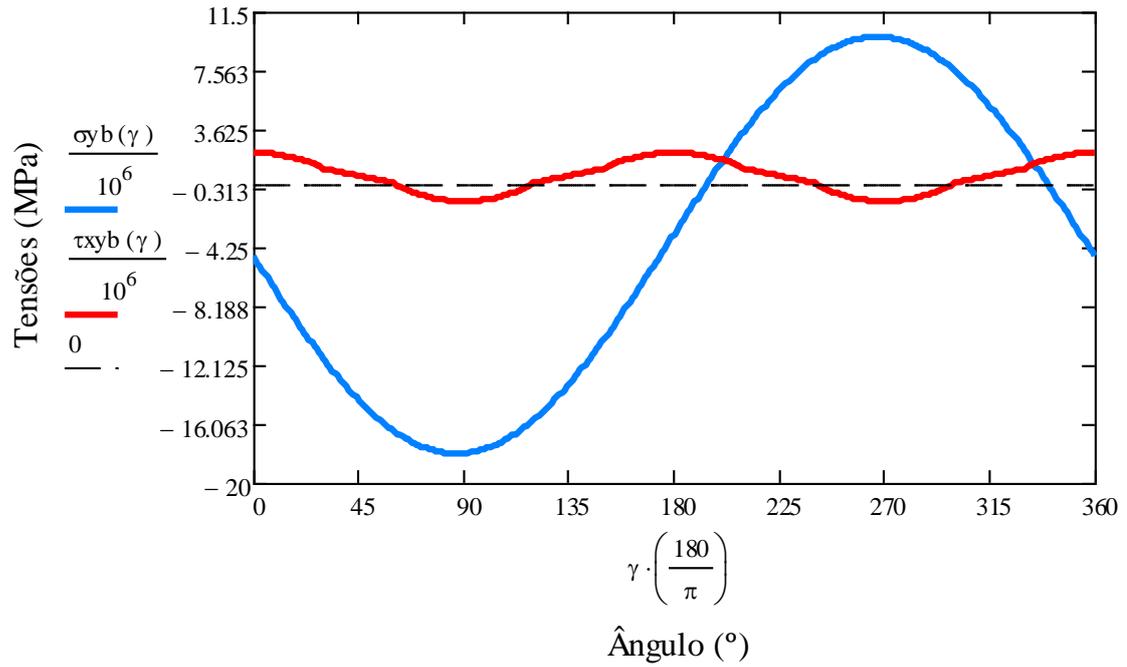
### Análise e discussão de resultados

O estudo realizado no presente trabalho de conclusão de curso foi analisado em três situações conforme descritas no capítulo anterior. Foi realizado um estudo dos modelos onde os carregamentos são suportados apenas pelo osso, apenas pela haste e, pela haste e pelo osso em conjunto. Dessa forma, obteve-se um embasamento de informações necessárias para que fosse possível a avaliação do comportamento das cargas atuantes no conjunto. Neste capítulo é apresentada a análise e discussão dos resultados obtidos a partir do modelo analítico elaborado no capítulo anterior.

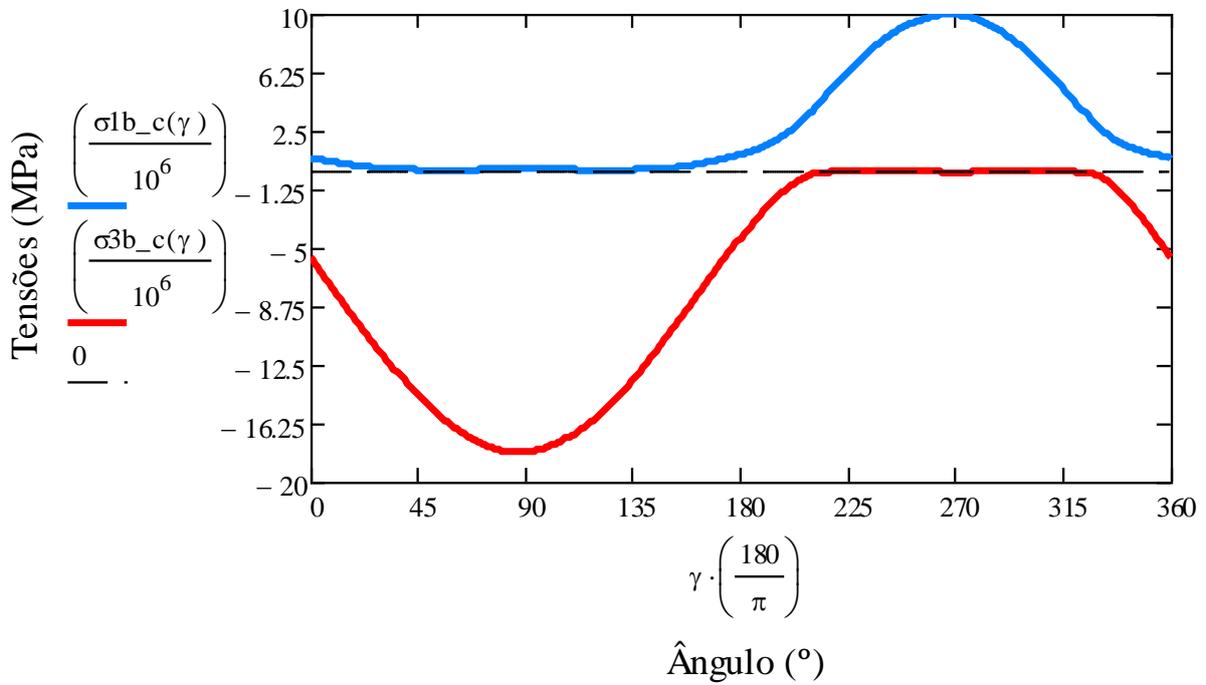
#### 4.1. Resultados obtidos

Analisando o modelo Apenas o Osso (AO), que mostra o comportamento do osso sob os efeitos das cargas internas aplicadas a ele, é possível perceber como o osso sadio, em suas condições normais de funcionamento, reage às tensões geradas nele. Através das forças, dos pontos de aplicações e das distâncias das mesmas ao centroide da seção transversal analisada, pode-se estimar a magnitude e o comportamento das tensões presentes no osso sadio e assim, analisar através das tensões combinadas, as situações mais críticas do modelo. A Fig. 30 representa o gráfico das tensões combinadas presentes no osso, que foi considerado como uma estrutura tubular com diâmetro externo de aproximadamente 31 mm e espessura de 7,75mm. A análise das tensões combinadas é de grande importância, pois como visto ao longo deste presente trabalho de conclusão de curso, o osso dificilmente fratura sob influência de tensões puras, porém fratura com frequência sob influência de tensões combinadas.

Aplicou-se a equação de tensões principais no osso para a análise das tensões. Dessa forma pode-se perceber pelo gráfico da Fig. 31 que a magnitude dessas tensões é variável ao longo da superfície do osso e que o valor da tensão máxima presente é equivalente a 18 MPa e o da tensão mínima é equivalente a 10 MPa.



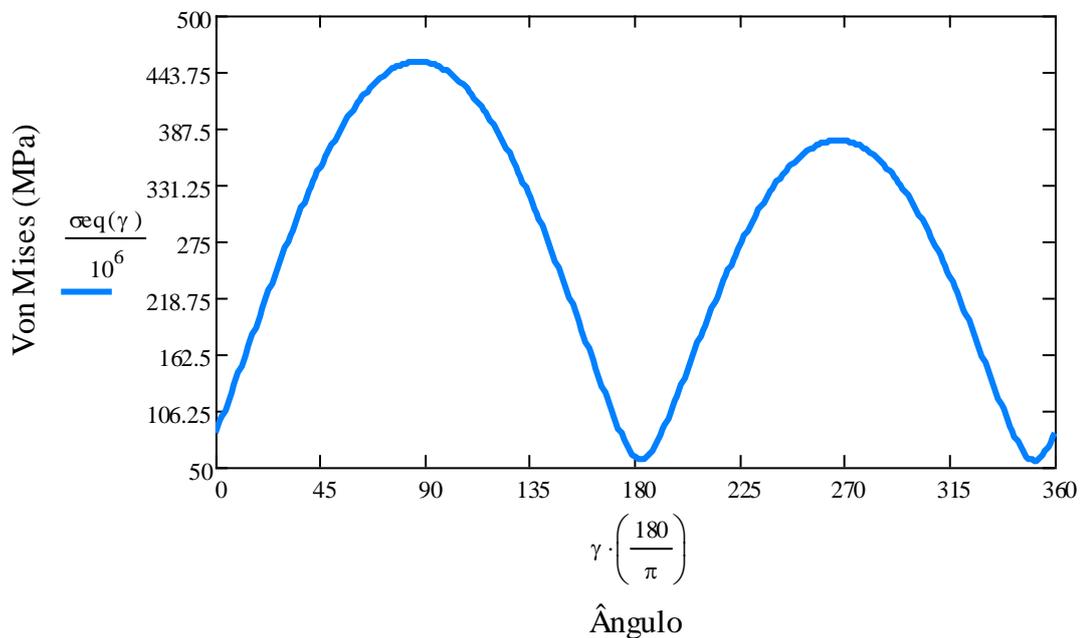
**FIGURA 30:** Gráfico das tensões combinadas atuantes no osso



**FIGURA 31:** Gráfico das tensões principais - Modelo Apenas o Osso

Quando o osso é submetido a tensões combinadas que superem o seu limite de resistência, ocorre a fratura. O modelo Apenas a Haste (AH) demonstra a situação em que a haste intramedular bloqueada é aplicada no osso após uma fratura, pois com a descontinuidade óssea a haste terá o papel de estabilizar e promover a sustentação no presente local. Dessa forma, todos os carregamentos suportados anteriormente pelo osso, agora são suportados apenas pela haste enquanto não há início do processo de recuperação óssea. A haste utilizada na presente análise é de aço inoxidável e possui estrutura tubular de diâmetro externo equivalente a 10mm e espessura de 2,5mm. Espera-se tensões maiores do que as presentes no osso devido a uma redução de cerca de 90% da área da seção transversal analisada.

A Fig. 32 representa as tensões combinadas presentes na haste intramedular. Por se tratar de uma estrutura de material dúctil, essa análise foi feita a partir do critério de von Mises. Observando a variação das tensões ao longo da superfície da haste, pode-se perceber que a tensão máxima aplicada à estrutura é equivalente a 454 MPa e a tensão mínima é equivalente a 56 MPa. Houve um aumento de cerca de 2411% em relação à tensão máxima combinada aplicada ao osso e um aumento de 467% em relação a tensão mínima.

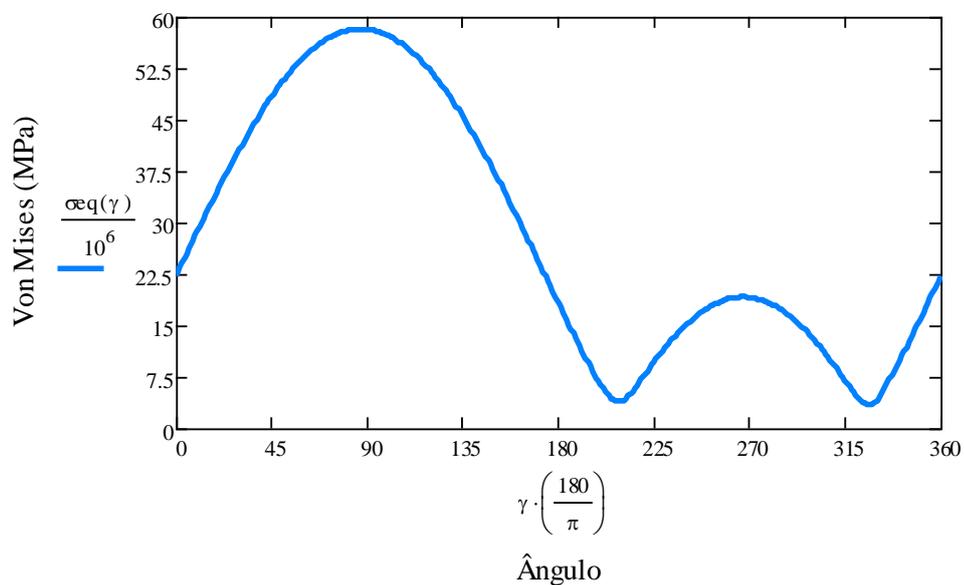


**FIGURA 32:** Von Mises – Modelo Apenas a Haste

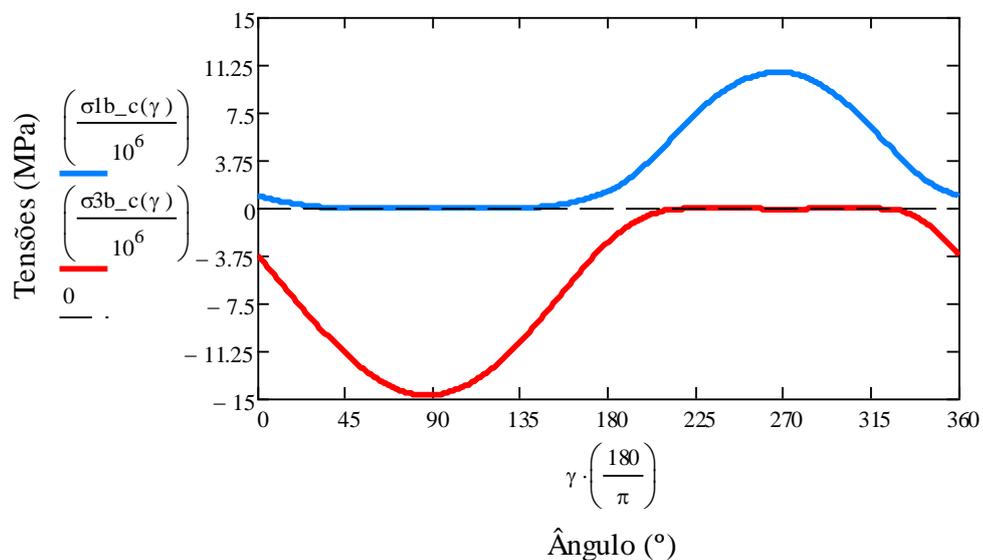
A partir do momento em que a haste intramedular bloqueada é inserida no osso e fixada para estabilizar as partes fraturadas, com o tempo o tecido ósseo começa o processo de remodelação óssea e as partes separadas tendem a se unir novamente com a reposição do tecido

ósseo. Como visto anteriormente, a concentração de tensões na haste intramedular é muito maior do que no osso, dessa maneira, espera-se que as tensões combinadas, as quais o osso sadio é submetido, sejam distribuídas pelo conjunto, ou seja, sejam menores em cada componente quando comparados às suas respectivas situações isoladas.

A Fig. 33 mostra o comportamento da combinação de tensões ao longo da superfície da haste intramedular, na seção transversal analisada do conjunto haste-osso, utilizando o critério de von Mises para materiais dúcteis. Já a Fig. 34 mostra o comportamento da combinação de tensões ao longo da superfície do osso, na seção transversal analisada do conjunto haste-osso, utilizando a equação das tensões principais.



**FIGURA 33:** Von Mises – Modelo Haste e Osso



**FIGURA 34:** Gráfico das tensões principais - Modelo Haste e Osso

Como observado, a tensão máxima obtida ao longo da superfície externa da haste é equivalente a 58 MPa e a tensão mínima é equivalente a 3 MPa. Isso representa uma redução de cerca de 87,2% da tensão máxima e 93,9% da tensão mínima, comparadas ao estado anterior ao processo de remodelação óssea. Essa redução das tensões na haste, confirma que o processo de recuperação óssea está ocorrendo de forma a restabelecer as propriedades mecânicas do osso cortical, pois ao passo que as tensões na haste são reduzidas, as tensões no osso precisam aumentar.

Conforme o processo de sintetização óssea progride, a resistência do osso cortical aumenta e espera-se um aumento de suas tensões ao longo do tempo. Essa hipótese se confirma ao observar-se na Fig. 34, na qual a máxima magnitude de tensão obtida ao longo da superfície externa do osso no conjunto, equivale a 14 MPa e a mínima equivale a 10 MPa. Dessa forma houve uma atenuação de cerca de 18,4% da tensão máxima comparado ao caso do osso sadio, e houve um aumento equivalente a cerca de 7% da tensão mínima comparada à mesma situação. Como a tensão máxima obtida ao longo da superfície externa do osso na seção analisada é menor do que a tensão máxima na situação Apenas o Osso, pode-se afirmar que a haste está contribuindo para preservar o osso em recuperação, das tensões que seriam aplicadas a ele em sua solicitação natural. Conforme há a recuperação da sua resistência, as tensões aplicadas ao osso aumentam no conjunto.

#### **4.2. Influência na distribuição das tensões devido a mudança de material da haste intramedular**

Dentre os materiais biologicamente compatíveis, fez-se uma comparação de dois materiais utilizados nos modelos de haste intramedular existentes: Aço inox e Liga de titânio.

Através da Tabela 4, que apresenta o percentual dos carregamentos destinados ao osso e a haste no Modelo Haste e Osso (HO), é possível perceber que há uma redução nos carregamentos destinados a haste intramedular e, conseqüentemente, um aumento dos carregamentos destinados ao osso, quando esta haste é feita de liga titânio. Pode-se relacionar esse fato devido aos materiais possuírem diferentes rigidezes. A haste de liga de titânio possui um módulo de elasticidade (E) menor, ou seja, é menos rígida que uma haste de o aço inox, isso faz com que ela absorva menores carregamentos, acarretando em menores tensões induzidas nela e num aumento das tensões no osso.

**TABELA 4:** Distribuição dos esforços

		Distribuição dos esforços	
Carregamento	Material da haste	Haste intramedular	Osso
Axial	Aço Inox	49,7%V <sub>z</sub>	50,3%V <sub>z</sub>
	Liga de Titânio	37,2%V <sub>z</sub>	62,8%V <sub>z</sub>
Cortante em relação ao eixo x	Aço Inox	9,3%V <sub>x</sub>	90,7%V <sub>x</sub>
	Liga de Titânio	5,8%V <sub>x</sub>	94,2%V <sub>x</sub>
Cortante em relação ao eixo y	Aço Inox	9,3%V <sub>y</sub>	90,7%V <sub>y</sub>
	Liga de Titânio	5,8%V <sub>y</sub>	94,2%V <sub>y</sub>
Fletor em relação ao eixo x	Aço Inox	9,3%M <sub>x</sub>	90,7%M <sub>x</sub>
	Liga de Titânio	5,8%M <sub>x</sub>	94,2%M <sub>x</sub>
Fletor em relação ao eixo y	Aço Inox	9,3%M <sub>y</sub>	90,7%M <sub>y</sub>
	Liga de Titânio	5,8%M <sub>y</sub>	94,2%M <sub>y</sub>
Torsor	Aço Inox	8,9%M <sub>z</sub>	91,1%M <sub>z</sub>
	Liga de Titânio	5,5%M <sub>z</sub>	94,5%M <sub>z</sub>

## Capítulo 5

### Conclusão

Neste capítulo são apresentadas as conclusões obtidas a partir do estudo realizado e sugestões para trabalhos futuros.

#### 5.1. Conclusão

Com a necessidade de obtenção de métodos que auxiliem no processo de recuperação de fraturas ósseas, novas tecnologias têm sido analisadas e implementadas. Dessa forma foi criado o método de utilização de hastes intramedulares para auxílio na calcificação óssea em fraturas diafisárias do fêmur.

O presente trabalho de conclusão de curso teve como objetivo, o desenvolvimento da análise de tensões na região diafisária de uma haste intramedular bloqueada durante o processo de recuperação de fratura diafisária do fêmur humano. Essa análise foi realizada através da aplicação dos conceitos da Resistência dos Materiais e com auxílio do software Mathcad 15.0. Foram desenvolvidos três modelos analíticos: Apenas o Osso (AO), Apenas a Haste (AH), Haste e Osso (HO), que representam, respectivamente, a situação inicial do osso sadio, a situação em que a haste é implantada e o momento em que o processo de recuperação óssea já está ocorrendo. Tais modelos foram desenvolvidos com o intuito de comparar o comportamento das distribuições de tensões durante o processo de recuperação fêmur.

Através da análise realizada, foi observado que logo após a implantação da haste no canal intramedular, os esforços, antes aplicados sobre o fêmur, agora são aplicados diretamente sobre a haste. Pelo fato da haste intramedular bloqueada ter uma área da seção transversal muito menor do que a do osso, as tensões que se desenvolvem nela são maiores. Com o passar do tempo, ocorre o processo de calcificação óssea, no qual o osso é remodelado no local fraturado através das ações celulares do tecido ósseo, e com isso tem suas propriedades mecânicas restauradas. Dessa forma, há uma diferença nas tensões direcionadas para a haste, pois com a remodelação óssea do local da fratura, as tensões serão distribuídas ao osso também. A alteração do material do qual a haste intramedular é constituída também influencia a distribuição de tensões quando se considera o conjunto haste-osso, isso é explicado através das

diferentes rigidezes dos materiais que fazem com que os menos rígidos induzam menores tensões.

Atualmente muitas pesquisas são desenvolvidas por órgãos competentes com o objetivo de melhorar o método de correção de fraturas utilizando hastes intramedulares e, espera-se que os modelos matemáticos obtidos no presente trabalho de conclusão de curso venham a auxiliar de algum modo tais pesquisas.

## **5.2. Sugestões de trabalhos futuros**

Com base na análise feita no presente trabalho de conclusão de curso, foi observado a possibilidade de serem realizadas considerações não abordadas que promovam uma análise mais aprofundada da implantação de hastes intramedulares, como por exemplo:

- A análise considerando a variação do diâmetro externo da haste intramedular bloqueada a fim de observar o comportamento das tensões em cada situação;
- Observar como a variação da espessura da haste intramedular bloqueada contribui na melhoria da distribuição das tensões no conjunto;
- Considerar outros métodos de fixação, como por exemplo a placa de osteossíntese, e confrontar os resultados a fim de indicar as vantagens da utilização da haste intramedular no processo de recuperação da fatura óssea.

Além disso, sugere-se o aperfeiçoamento do modelo analítico desenvolvido a fim de eliminar algumas das restrições impostas, e a realização de uma validação experimental.

## Referências Bibliográficas

- [1] DANGELO, J. G., FATTINI, C. A., *Anatomia Humana – Sistêmica e Segmentar*, 768, 3ª edição, Editora Atheneu, São Paulo, 2007;
- [2] FERNANDES, Maria Goretti A., *Análise biomecânica das fraturas do fêmur e Avaliação do melhor implante*, 70, Instituto Politécnico de Bragança, Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Bragança, Setembro, 2013;
- [3] SILVA, Arnaldo F., *Apostila Osteologia Sistema Esquelético*, 47. Disponível em: <<http://laboratoriodeanatomia.blogspot.com>> Acesso em 7 de Novembro de 2015;
- [4] JUNQUEIRA, Luiz C., CARNEIRO, José, *Histologia Básica*, 535, 11ª edição, Editora Editora Guanabara Koogan S.A., Rio de Janeiro, 2008;
- [5] TORTORA, Gerard J., *Corpo Humano – Fundamentos de Anatomia e Fisiologia*, 618, 4ª edição, Editora ArtMed, Porto Alegre, 2000;
- [6] *Orto Blog*, Disponível em <<http://nelsonooka.blog.uol.com.br/>> Acesso em 7 de Novembro de 2015;
- [7] COMPLETO, Antonio, FONSECA, Fernando, *Fundamentos de Biomecânica Músculo-Esquelética e Ortopédica*, Editora Publindústria, Porto, 2011;
- [8] RUEDI, Thomas P., MURPHY, M. W., *Princípios AO do tratamento de fraturas*, Editora ARTMED, 2002;
- [9] TROSTLE, S. S., MARKEL, M. D., *Fracture biology, biomechanics, and internal fixation - Veterinary Clinics of North América: Food Animal Practice*, volume 12, pp. 19-46, 1996;
- [10] SCHATZKER, Joseph, TILE, Martin, *The rationale of operative fracture care*, Editora Springer, Berlim, 2005;
- [11] MULLER, M.E., ALLGOWER, M., SCHNEIDER R., *Manual of Internal Fixation*, 3ª Edição, Editora Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1991;
- [12] POZZI, Isabel, SANDRO, Reginaldo, DE ALMEIDA, Múcio V., CRISTANTE, Alexandre F., *Manual de trauma ortopédico*, SBOT - Sociedade Brasileira de Ortopedia e Traumatologia, 169, São Paulo, 2011;
- [13] *Ortosil Ortopedia*, Disponível em <<http://ortosil.com.br/BG/femurtibia.jpg>>, Acesso em 02 Janeiro 2016;

- [14] *Osteossíntese*, Disponível em <http://www.wgate.com.br/conteudo/medicinaesaude/fisioterapia/traumato/osteossintese/osteossintese.htm>, Acesso em 02 de Janeiro de 2016;
- [15] KENEDI, P. P., VIGNOLI, Lucas L., *Modeling the loading share between an osteosynthesis plate and a human femur*, 7º COLAQB - Congresso Latino Americano de órgãos artificiais e biomecânicos 2012, Natal - RN;
- [16] AO Foundation, Disponível em [https://www2.aofoundation.org/wps/portal!/ut/p/a0/04\\_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOKN\\_A0M3D2DDbz9\\_UMMDRyDXQ3dw9wMDAzMjfULsh0VAbWjLW0!/?bone=Femur&classification=32-A3&implantstype=Compression%20plating%20\(distal%20shaft\)&method=ORIF%20\(open%20reduction%20int\)](https://www2.aofoundation.org/wps/portal!/ut/p/a0/04_Sj9CPykssy0xPLMnMz0vMAfGjzOKN_A0M3D2DDbz9_UMMDRyDXQ3dw9wMDAzMjfULsh0VAbWjLW0!/?bone=Femur&classification=32-A3&implantstype=Compression%20plating%20(distal%20shaft)&method=ORIF%20(open%20reduction%20int)), Acesso em 11 de Novembro de 2015;
- [17] NUNAMAKER, D. M., *Methods of internal fixation*, Disponível em [http://cal.vet.upenn.edu/projects/saortho/chapter\\_16/16mast.htm](http://cal.vet.upenn.edu/projects/saortho/chapter_16/16mast.htm), Acesso em 10 de Fevereiro de 2016;
- [18] *TST Products - Intramedullary Nails*, Disponível em <http://ttsan.com>, Acesso em 11 de Novembro de 2015;
- [19] HIBBELER, R. C., *Resistência dos materiais*, 637, 7ª edição, Editora: Pearson, São Paulo, 2009;
- [20] BUDYNAS, R. G., NISBETT, J. K., *Elementos de máquinas de Shigley*, 1096, 10ª Edição, AMGH Editora Ltda, São Paulo, 2016;
- [21] *Instituto de matemática e estatística, Universidade de São Paulo - IME-USP*, Disponível em [http://www.ime.usp.br/~oda/contents/01Matem%E1tica/01Sistemas%20Din%E2micos/04\\_Elem\\_Sist\\_Mec.pdf](http://www.ime.usp.br/~oda/contents/01Matem%E1tica/01Sistemas%20Din%E2micos/04_Elem_Sist_Mec.pdf), Acesso em 19 de Março de 2016;
- [22] TAYLOR, M. E., TANNER, K. E., FREEMAN, M. A. R., YETTRAM, A. L., *Stress and strain distribution within the intact femur: compression or bending?*, Med. Eng. Phys., Vol. 18, nº2, pp. 122-131, 1996;
- [23] *Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia*, Disponível em <https://www.into.saude.gov.br/noticiasAtuais.aspx?id=497>, Acesso em 15 de Maio de 2016;

- [24] KENEDI, P. P., VIGNOLI, Lucas L., *Osteosynthesis plate: Analytical and Finite Element Approaches*, XXIV Brazilian Congress on Biomedical Engineering – CBEB 2014, Uberlândia - Minas Gerais.

## APÊNDICE A: Expressões referentes a geometria da seção transversal analisada

**TABELA A1:** Expressões – Geometrias

Osso	Haste intramedular
$A^o = \pi(r_e^2 - r_i^2)$	$A^h = \pi(r_{eh}^2 - r_{ih}^2)$
$I_x^o = \frac{\pi(r_e^4 - r_i^4)}{4}$	$I_x^h = \frac{\pi(r_{eh}^4 - r_{ih}^4)}{4}$
$I_y^o = \frac{\pi(r_e^4 - r_i^4)}{4}$	$I_y^h = \frac{\pi(r_{eh}^4 - r_{ih}^4)}{4}$
$J^o = \frac{\pi(r_e^4 - r_i^4)}{2}$	$J^h = \frac{\pi(r_{eh}^4 - r_{ih}^4)}{2}$
$Q_x^o(y) = \frac{2}{3} \left[ (r_e^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - (r_i^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} k_f \right]$ $k_f = 0$ para $r_i < y \leq r_e$ , $k_f = 1$ para os demais $y$	$Q_x^h(y) = \frac{2}{3} \left[ (r_{eh}^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} - (r_{ih}^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} k_f \right]$ $k_f = 0$ para $r_{ih} < y \leq r_{eh}$ , $k_f = 1$ para os demais $y$
$Q_y^o(x) = \frac{2}{3} \left[ (r_e^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - (r_i^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} k_f \right]$ $k_f = 0$ para $r_i < x \leq r_e$ , $k_f = 1$ para os demais $x$	$Q_y^h(x) = \frac{2}{3} \left[ (r_{eh}^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - (r_{ih}^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} k_f \right]$ $k_f = 0$ para $r_{ih} < x \leq r_{eh}$ , $k_f = 1$ para os demais $x$
$t_x^o(y) = 2\sqrt{r_e^2 - y^2} - 2 \left( \sqrt{r_i^2 - y^2} \right) k_f$ $k_f = 0$ para $r_i < y \leq r_e$ , $k_f = 1$ para os demais $y$	$t_x^h(y) = 2\sqrt{r_{eh}^2 - y^2} - 2 \left( \sqrt{r_{ih}^2 - y^2} \right) k_f$ $k_f = 0$ para $r_{ih} < y \leq r_{eh}$ , $k_f = 1$ para os demais $y$
$t_y^o(x) = 2\sqrt{r_e^2 - x^2} - 2 \left( \sqrt{r_i^2 - x^2} \right) k_f$ $k_f = 0$ para $r_i < x \leq r_e$ , $k_f = 1$ para os demais $x$	$t_y^h(x) = 2\sqrt{r_{eh}^2 - x^2} - 2 \left( \sqrt{r_{ih}^2 - x^2} \right) k_f$ $k_f = 0$ para $r_{ih} < x \leq r_{eh}$ , $k_f = 1$ para os demais $x$

Em que, os índices  $o$  e  $h$  correspondem respectivamente ao osso e a haste intramedular,  $A$  representa a área da seção transversal analisada,  $r$  o raio,  $k_f$  uma constante,  $I$  o momento de inércia de área,  $J$  o momento polar de inércia de área,  $Q$  o momento de primeira ordem,  $t$  a espessura,  $x$  varia de  $0 \leq x \leq r_{eh}$  para a haste intramedular e, de  $0 \leq x \leq r_e$  para o osso, sendo  $x = r \cdot \cos \gamma$  e,  $y$  varia de  $0 \leq y \leq r_{eh}$  para a haste intramedular e, de  $0 \leq y \leq r_e$  para o osso, sendo  $y = r \cdot \sin \gamma$ .

## **APÊNDICE B: Valores das forças externas, pontos de aplicação e distâncias até o centroide da região analisada**

**TABELA B1:** Valores das forças externas atuantes na cabeça do fêmur, pontos de aplicação e distâncias [24]

	Valor da força (N)	Ponto de aplicação (mm)	Distâncias (mm)
Reação da Junta P <sub>1</sub>	(-1062; -130; -2800)	(50,7; -2,7; 218)	(50; -6,7; 183)
Adutora P <sub>2</sub>	(430; 0; 1160)	(-13,5; -6,5; 200)	(-14; -10; 165)
Iliopsoas P <sub>3</sub>	(78; 560; 525)	(18,8; -29,3; 143,7)	(18; -33; 109)
Trato Iliotibial P <sub>4</sub>	(0; 0; -1200)	(-24,6; -4,2; 168)	(-25; -8,2; 133)

## APÊNDICE C: Programação no Mathcad - Modelo Apenas o Osso

$$r_o := 15.5\text{mm} \quad r_i := 7.75\text{mm}$$

$$E_b := 20\text{GPa}$$

$$\nu_b := 0.23$$

$$G_b := \frac{E_b}{2 \cdot (1 + \nu_b)}$$

$$G_b = 8.091 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$\phi := 0$$

$$V_g := (-1062 \ -130 \ -2800 \ 430 \ 0 \ 1160 \ 78 \ 560 \ 525 \ 0 \ 0 \ -1200)\text{N}$$

$$d1 := [(0.050741 - 0.0006)\text{m}]$$

$$d1 = 0.05\text{m}$$

$$d2 := (-0.002718 + -0.004)\text{m}$$

$$d2 = -6.718 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$d3 := (0.13295 + 0.050)\text{m}$$

$$d3 = 0.183\text{m}$$

$$d4 := (-0.013483 - 0.0006)\text{m}$$

$$d4 = -0.014\text{m}$$

$$d5 := (-0.006497 + -0.004)\text{m}$$

$$d5 = -0.01\text{m}$$

$$d6 := (0.1148 + 0.050)\text{m}$$

$$d6 = 0.165\text{m}$$

$$d7 := (0.018792 - 0.0006)\text{m}$$

$$d7 = 0.018\text{m}$$

$$d8 := (-0.02929 + -0.004)\text{m}$$

$$d8 = -0.033\text{m}$$

$$d9 := (0.0588 + 0.050)\text{m}$$

$$d9 = 0.109\text{m}$$

$$d10 := (-0.024585 - 0.0006)\text{m}$$

$$d10 = -0.025\text{m}$$

$$d11 := (-0.0042044 + -0.004)\text{m}$$

$$d11 = -8.204 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$d12 := (0.083 + 0.050)\text{m}$$

$$d12 = 0.133\text{m}$$

$$d := (d1 \ d2 \ d3 \ d4 \ d5 \ d6 \ d7 \ d8 \ d9 \ d10 \ d11 \ d12)$$

$$i := 0..3$$

$$M_{g_{0,3+i+0}} := d_{0,3+i+1} \cdot V_{g_{0,3+i+2}} - d_{0,3+i+2} \cdot V_{g_{0,3+i+1}}$$

$$M_{g_{0,3+i+1}} := d_{0,3+i+2} \cdot V_{g_{0,3+i+0}} - d_{0,3+i+0} \cdot V_{g_{0,3+i+2}}$$

$$M_{g_{0,3+i+2}} := d_{0,3+i+0} \cdot V_{g_{0,3+i+1}} - d_{0,3+i+1} \cdot V_{g_{0,3+i+0}}$$

$$M_g =$$

	0	1	2	3	4	5	6	J
0	42.594	-53.898	-13.653	-12.177	87.2	4.514	...	

$$V_{0,3+i+0} := V_{g_{0,3+i+0}} \cdot \cos(\phi) + V_{g_{0,3+i+1}} \cdot \sin(\phi)$$

$$V_{0,3+i+1} := -V_{g_{0,3+i+0}} \cdot \sin(\phi) + V_{g_{0,3+i+1}} \cdot \cos(\phi)$$

$$V_{0,3+i+2} := V_{g_{0,3+i+2}}$$

$$V = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & -1.062 \cdot 10^3 & -130 & -2.8 \cdot 10^3 & 430 & 0 & \dots \end{array} \text{ N}$$

$$V_x := \sum_i V_{0,3+i+0} \quad V_x = -554 \text{ N}$$

$$V_y := \sum_i V_{0,3+i+1} \quad V_y = 430 \text{ N}$$

$$V_z := \sum_i V_{0,3+i+2} \quad V_z = -2.315 \times 10^3 \text{ N}$$

$$M_{0,3+i+0} := M_{g_{0,3+i+0}} \cdot \cos(\phi) + M_{g_{0,3+i+1}} \cdot \sin(\phi)$$

$$M_{0,3+i+1} := -M_{g_{0,3+i+0}} \cdot \sin(\phi) + M_{g_{0,3+i+1}} \cdot \cos(\phi)$$

$$M_{0,3+i+2} := M_{g_{0,3+i+2}}$$

$$M = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 42.594 & -53.898 & -13.653 & -12.177 & 87.2 & 4.514 & \dots \end{array} \text{ J}$$

$$M_x := \sum_i M_{0,3+i+0} \quad M_x = -38.143 \text{ J}$$

$$M_y := \sum_i M_{0,3+i+1} \quad M_y = 2.016 \text{ J}$$

$$T := \sum_i M_{0,3+i+2} \quad T = 3.645 \text{ J}$$

$$\gamma := 0, \left( \frac{\pi}{180} \right) .. 2 \cdot \pi$$

$$A_b := \pi \cdot (r_o^2 - r_i^2)$$

$$A_b = 5.661 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\sigma_{N_b} := \frac{V_z}{A_b}$$

$$\sigma_{N_b} = -4.09 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$I_{b_x} := \frac{\pi}{4} \cdot (r_o^4 - r_i^4)$$

$$I_{b_x} = 4.25 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_{b_y} := I_{b_x}$$

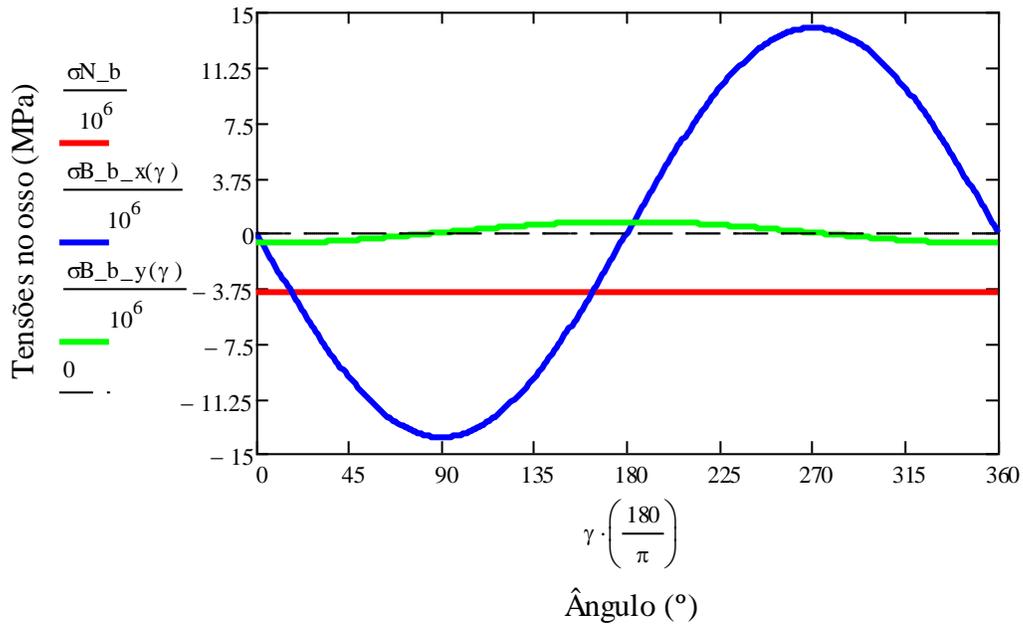
$$I_{b_y} = 4.25 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$x_c2(\gamma) := -r_o \cdot \cos(\gamma)$$

$$y_c2(\gamma) := r_o \cdot \sin(\gamma)$$

$$\sigma_{B_b_x}(\gamma) := \frac{M_x \cdot y_c2(\gamma)}{I_{b_x}}$$

$$\sigma_{B_b_y}(\gamma) := \frac{M_y \cdot x_c2(\gamma)}{I_{b_y}}$$

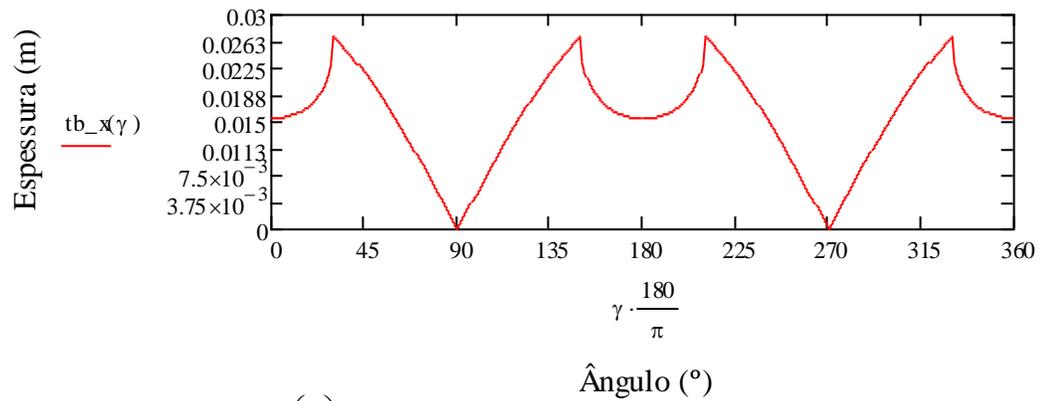


$$J_b := \frac{\pi}{2} \cdot (r_o^4 - r_i^4)$$

$$J_b = 8.5 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$\tau_b := \frac{T \cdot r_o}{J_b}$$

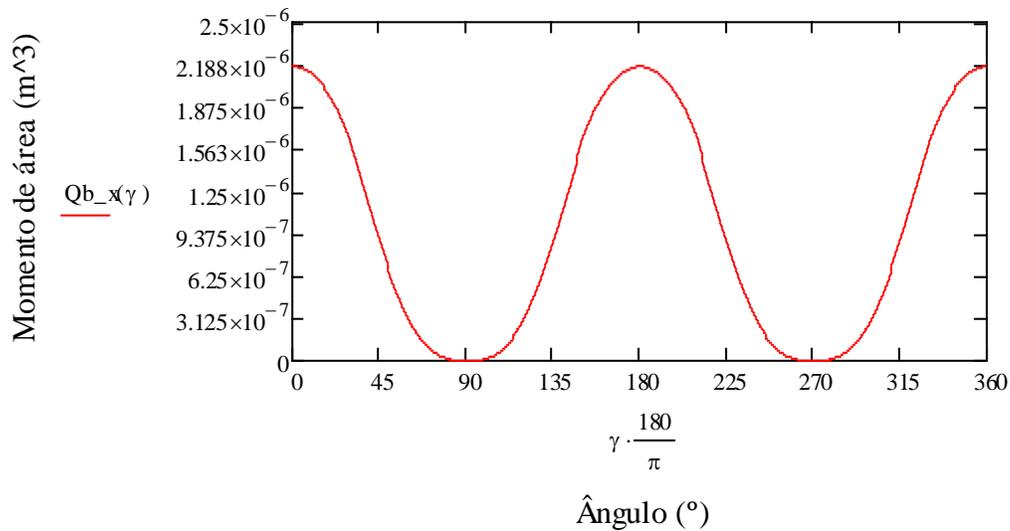
$$\tau_{b_x}(\gamma) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{r_o^2 - (y_c2(\gamma))^2} & \text{if } r_i < |y_c2(\gamma)| \leq r_o \\ 2 \left[ \sqrt{r_o^2 - (y_c2(\gamma))^2} - \sqrt{r_i^2 - (y_c2(\gamma))^2} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$



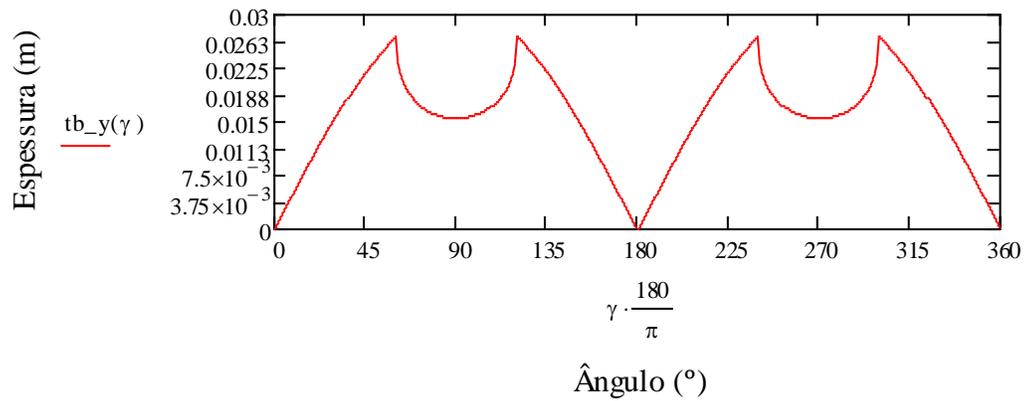
$$Q12(\gamma) := \frac{2}{3} \cdot \left[ r_o^2 - (y_{c2}(\gamma))^2 \right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$Q32(\gamma) := \frac{2}{3} \cdot \left[ r_i^2 - (y_{c2}(\gamma))^2 \right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$Qb_x(\gamma) := \begin{cases} Q12(\gamma) & \text{if } r_i < |y_{c2}(\gamma)| \leq r_o \\ Q12(\gamma) - Q32(\gamma) & \text{otherwise} \end{cases}$$



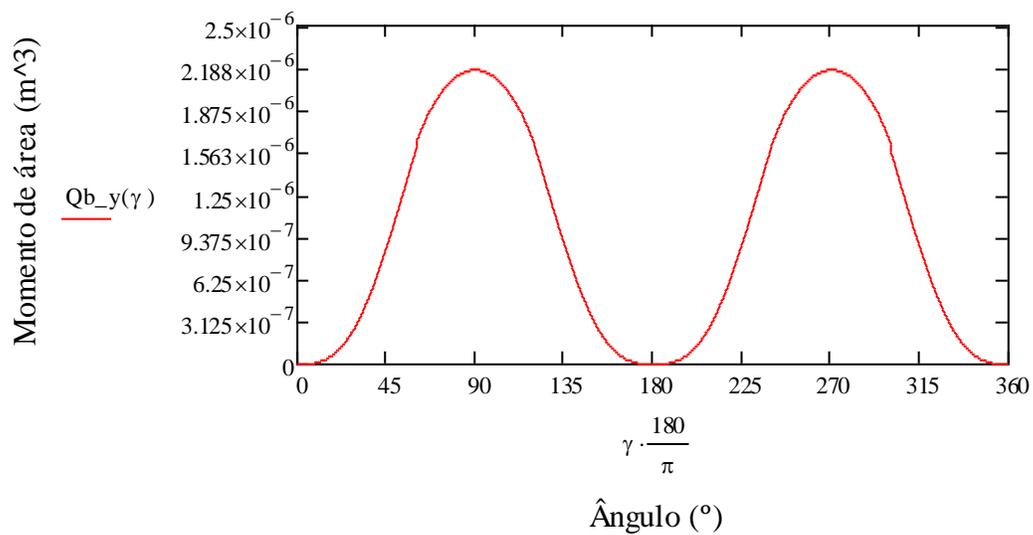
$$tb_y(\gamma) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{r_o^2 - (x_{c2}(\gamma))^2} & \text{if } r_i < |x_{c2}(\gamma)| \leq r_o \\ 2 \left[ \sqrt{r_o^2 - (x_{c2}(\gamma))^2} - \sqrt{r_i^2 - (x_{c2}(\gamma))^2} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$Q12(\gamma) := \frac{2}{3} \cdot [ro^2 - (xc\lambda\gamma)]^2 \left(\frac{3}{2}\right)$$

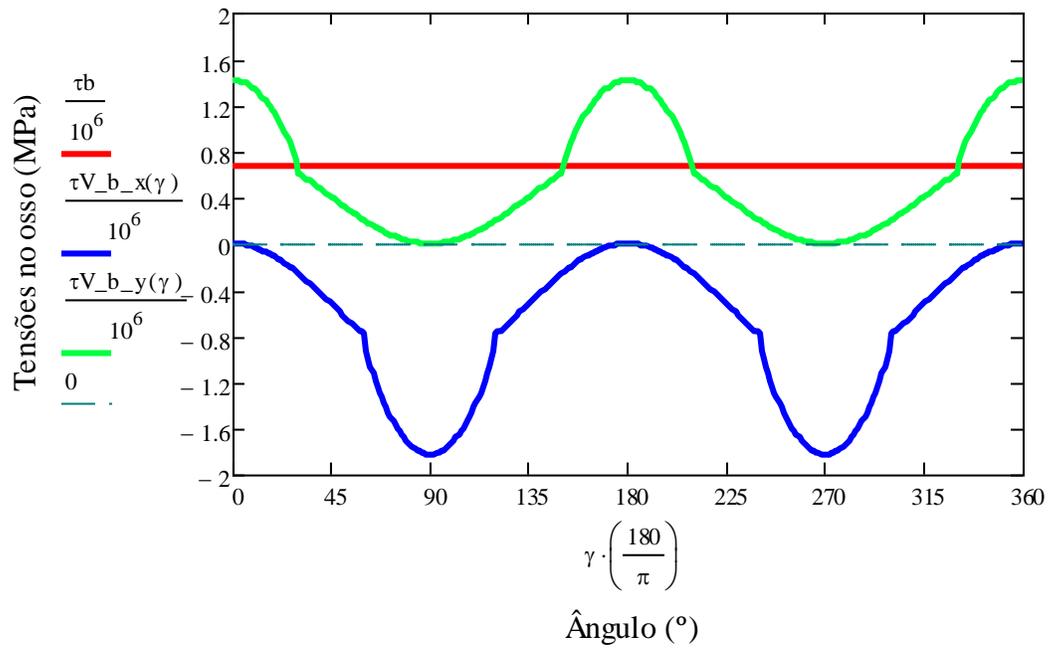
$$Q32(\gamma) := \frac{2}{3} \cdot [ri^2 - (xc\lambda\gamma)]^2 \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$Qb_y(\gamma) := \begin{cases} Q12(\gamma) & \text{if } ri < |xc\lambda\gamma| \leq ro \\ Q12(\gamma) - Q32(\gamma) & \text{otherwise} \end{cases}$$



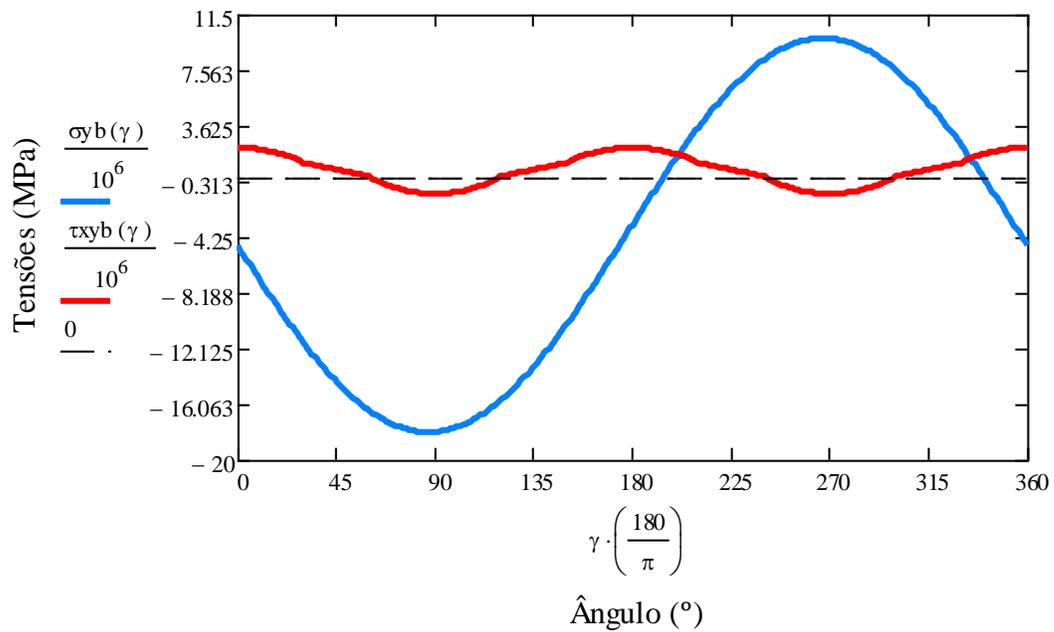
$$\tau V_{b_x}(\gamma) := \left( \frac{V_x Qb_y(\gamma)}{Ib_y \cdot tb_y(\gamma)} \right)$$

$$\tau V_{b_y}(\gamma) := \left( \frac{V_y Qb_x(\gamma)}{Ib_x \cdot tb_x(\gamma)} \right)$$



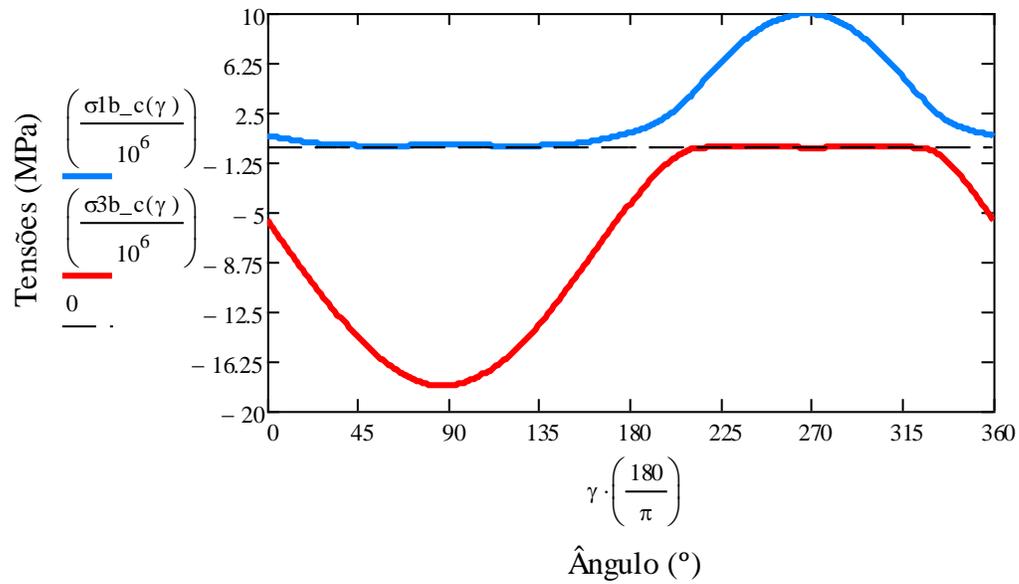
$$\sigma_{yb}(\gamma) := \sigma_{N_b} + \sigma_{B_{b_x}}(\gamma) + \sigma_{B_{b_y}}(\gamma)$$

$$\tau_{xyb}(\gamma) := \tau_b + \tau_{V_{b_x}}(\gamma) + \tau_{V_{b_y}}(\gamma)$$



$$\sigma_{1b\_c}(\gamma) := \frac{\sigma_{yb}(\gamma)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{yb}(\gamma)}{2}\right)^2 + (\tau_{xyb}(\gamma))^2}$$

$$\sigma_{3b\_c}(\gamma) := \frac{\sigma_{yb}(\gamma)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{yb}(\gamma)}{2}\right)^2 + (\tau_{xyb}(\gamma))^2}$$



## APÊNDICE D: Programação no Mathcad - Modelo Apenas a Haste

$$r_{o\_in} := 5 \cdot \text{mm}$$

$$r_{i\_in} := 2.5 \cdot \text{mm}$$

$$E_{in} := 190 \text{ GPa}$$

Aço inox

$$E_{int} := 114 \text{ GPa}$$

Liga de Titânio

$$\nu_{in} := 0.3$$

$$\nu_{int} := 0.3$$

$$G_{in} := \frac{E_{in}}{2 \cdot (1 + \nu_{in})}$$

$$G_{int} := \frac{E_{int}}{2 \cdot (1 + \nu_{int})}$$

$$G_{in} = 7.308 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$G_{int} = 4.385 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$\phi := 0$$

$$V_g := (-1062 \ -130 \ -2800 \ 430 \ 0 \ 1160 \ 78 \ 560 \ 525 \ 0 \ 0 \ -1200) \text{ N}$$

$$d1 := [(0.050741 - 0.0006) \text{ m}]$$

$$d1 = 0.05 \text{ m}$$

$$d2 := (-0.002718 + -0.004) \text{ m}$$

$$d2 = -6.718 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d3 := (0.13295 + 0.050) \text{ m}$$

$$d3 = 0.183 \text{ m}$$

$$d4 := (-0.013483 - 0.0006) \text{ m}$$

$$d4 = -0.014 \text{ m}$$

$$d5 := (-0.006497 + -0.004) \text{ m}$$

$$d5 = -0.01 \text{ m}$$

$$d6 := (0.1148 + 0.050) \text{ m}$$

$$d6 = 0.165 \text{ m}$$

$$d7 := (0.018792 - 0.0006) \text{ m}$$

$$d7 = 0.018 \text{ m}$$

$$d8 := (-0.02929 + -0.004) \text{ m}$$

$$d8 = -0.033 \text{ m}$$

$$d9 := (0.0588 + 0.050) \text{ m}$$

$$d9 = 0.109 \text{ m}$$

$$d10 := (-0.024585 - 0.0006) \text{ m}$$

$$d10 = -0.025 \text{ m}$$

$$d11 := (-0.0042044 + -0.004) \text{ m}$$

$$d11 = -8.204 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d12 := (0.083 + 0.050) \text{ m}$$

$$d12 = 0.133 \text{ m}$$

$$d := (d1 \ d2 \ d3 \ d4 \ d5 \ d6 \ d7 \ d8 \ d9 \ d10 \ d11 \ d12)$$

$$i := 0..3$$

$$M_{g_{0,3:i+0}} := d_{0,3:i+1} \cdot V_{g_{0,3:i+2}} - d_{0,3:i+2} \cdot V_{g_{0,3:i+1}}$$

$$M_{g_{0,3:i+1}} := d_{0,3:i+2} \cdot V_{g_{0,3:i+0}} - d_{0,3:i+0} \cdot V_{g_{0,3:i+2}}$$

$$M_{g_{0,3:i+2}} := d_{0,3:i+0} \cdot V_{g_{0,3:i+1}} - d_{0,3:i+1} \cdot V_{g_{0,3:i+0}}$$

$$M_g =$$

	0	1	2	3	4	5	6
0	42.594	-53.898	-13.653	-12.177	87.2	4.514	...

$$\vec{V}_{0,3:i+0} := V_{g_{0,3:i+0}} \cdot \cos(\phi) + V_{g_{0,3:i+1}} \cdot \sin(\phi)$$

$$V_{0,3:i+1} := -V_{g_{0,3:i+0}} \cdot \sin(\phi) + V_{g_{0,3:i+1}} \cdot \cos(\phi)$$

$$V_{0,3:i+2} := V_{g_{0,3:i+2}}$$

$$V = \begin{array}{c|cccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & -1.062 \cdot 10^3 & -130 & -2.8 \cdot 10^3 & 430 & 0 & \dots \end{array} \text{ N}$$

$$V_x := \sum_i V_{0,3:i+0} \quad V_x = -554 \text{ N}$$

$$V_y := \sum_i V_{0,3:i+1} \quad V_y = 430 \text{ N}$$

$$V_z := \sum_i V_{0,3:i+2} \quad V_z = -2.315 \times 10^3 \text{ N}$$

$$M_{0,3:i+0} := M_{g_{0,3:i+0}} \cdot \cos(\phi) + M_{g_{0,3:i+1}} \cdot \sin(\phi)$$

$$M_{0,3:i+1} := -M_{g_{0,3:i+0}} \cdot \sin(\phi) + M_{g_{0,3:i+1}} \cdot \cos(\phi)$$

$$M_{0,3:i+2} := M_{g_{0,3:i+2}}$$

$$M = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 42.594 & -53.898 & -13.653 & -12.177 & 87.2 & 4.514 & \dots \end{array} \text{ J}$$

$$M_x := \sum_i M_{0,3:i+0} \quad M_x = -38.143 \text{ J}$$

$$M_y := \sum_i M_{0,3:i+1} \quad M_y = 2.016 \text{ J}$$

$$\vec{T} := \sum_i M_{0,3:i+2} \quad T = 3.645 \text{ J}$$

$$\gamma := 0, \left( \frac{\pi}{180} \right) .. 2 \cdot \pi$$

$$A_{in} := \pi \cdot (r_{o\_in}^2 - r_{i\_in}^2)$$

$$A_{in} = 5.89 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\sigma_{N\_in} := \frac{Vz}{A_{in}}$$

$$\sigma_{N\_in} = -3.93 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$I_{in\_x} := \frac{\pi}{4} \cdot (r_{o\_in}^4 - r_{i\_in}^4)$$

$$I_{in\_x} = 4.602 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$I_{in\_y} := I_{in\_x}$$

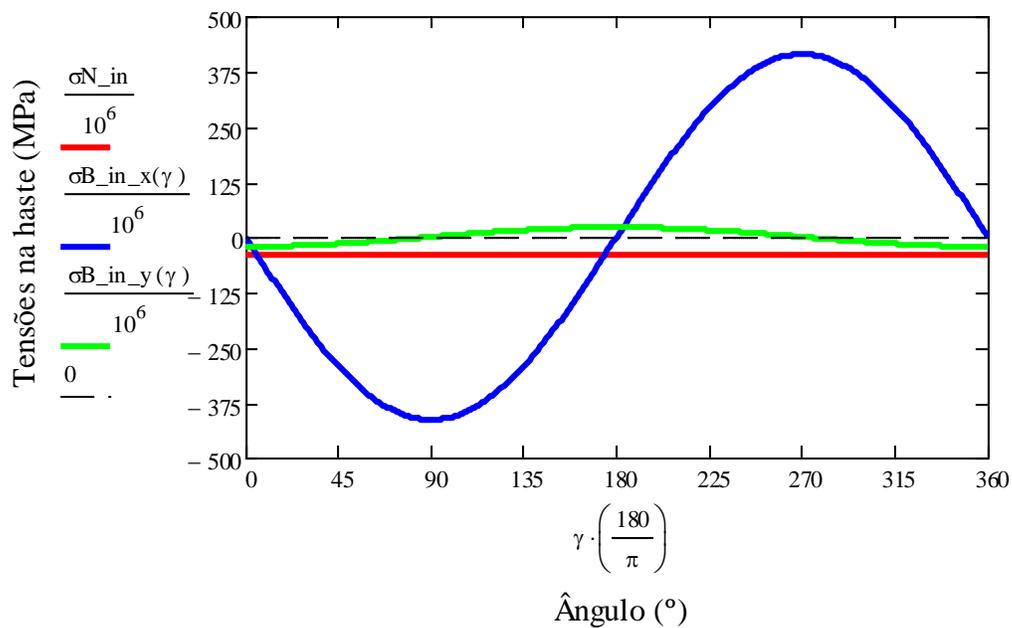
$$I_{in\_y} = 4.602 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$x(\gamma) := -r_{o\_in} \cdot \cos(\gamma)$$

$$y(\gamma) := r_{o\_in} \cdot \sin(\gamma)$$

$$\sigma_{B\_in\_x}(\gamma) := \frac{Mx \cdot y(\gamma)}{I_{in\_x}}$$

$$\sigma_{B\_in\_y}(\gamma) := \frac{My \cdot x(\gamma)}{I_{in\_y}}$$



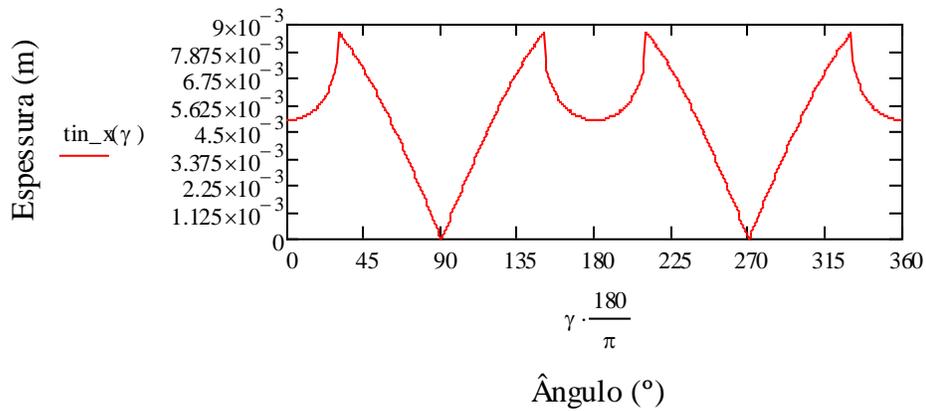
$$J_{in} := \frac{\pi}{2} \cdot (ro_{in}^4 - ri_{in}^4)$$

$$J_{in} = 9.204 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$\tau_{in} := \frac{T \cdot ro_{in}}{J_{in}}$$

$$\tau_{in} = 1.98 \times 10^7 \text{ Pa}$$

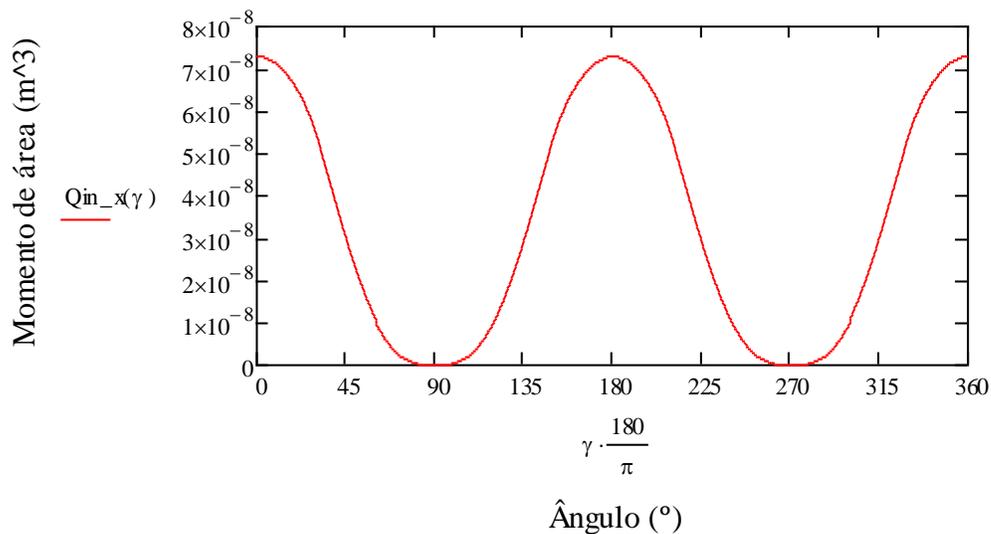
$$\tau_{in\_x}(\gamma) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{ro_{in}^2 - (yc(\gamma))^2} & \text{if } ri_{in} < |yc(\gamma)| \leq ro_{in} \\ 2 \left[ \sqrt{ro_{in}^2 - (yc(\gamma))^2} - \sqrt{ri_{in}^2 - (yc(\gamma))^2} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$



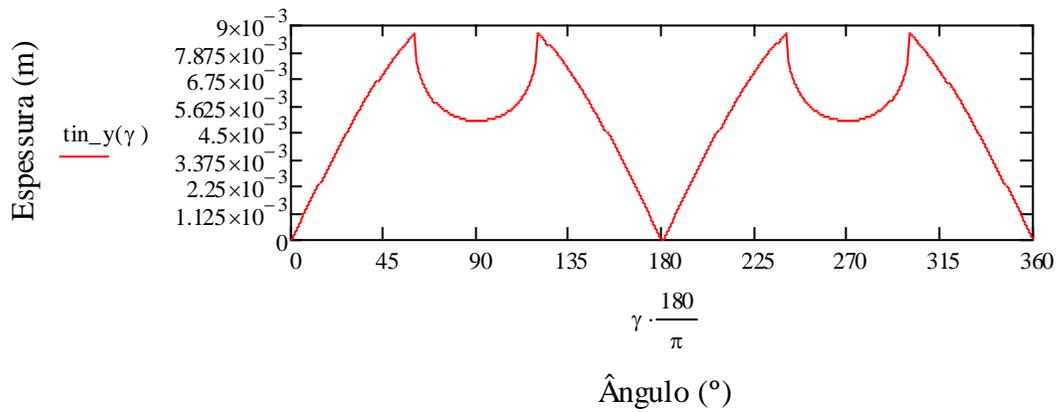
$$Q1(\gamma) := \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[ro_{in}^2 - (yc(\gamma))^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$Q3(\gamma) := \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[ri_{in}^2 - (yc(\gamma))^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$Q_{in\_x}(\gamma) := \begin{cases} Q1(\gamma) & \text{if } ri_{in} < |yc(\gamma)| \leq ro_{in} \\ Q1(\gamma) - Q3(\gamma) & \text{otherwise} \end{cases}$$



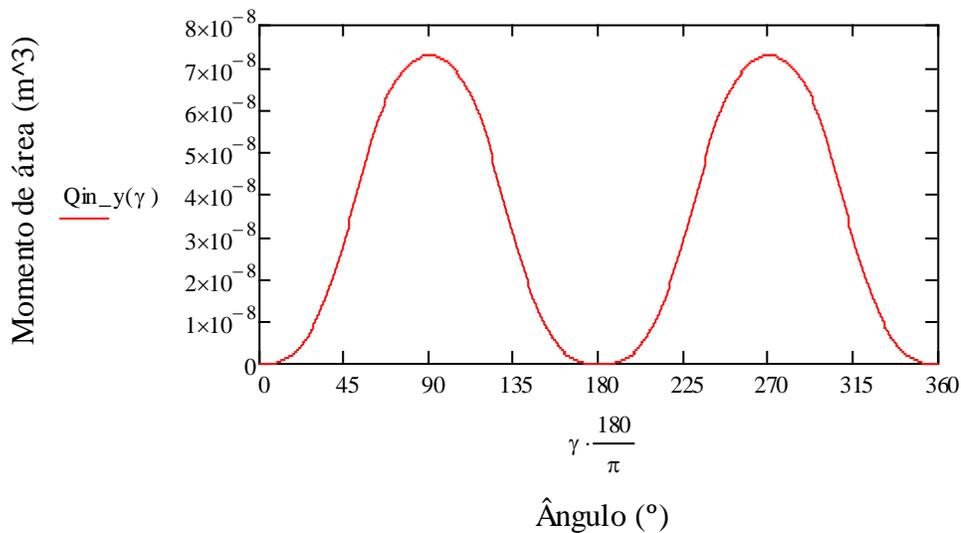
$$t_{in\_y}(\gamma) := \begin{cases} 2\sqrt{r_{o\_in}^2 - (x\alpha(\gamma))^2} & \text{if } r_{i\_in} < |x\alpha(\gamma)| \leq r_{o\_in} \\ 2\left[\sqrt{r_{o\_in}^2 - (x\alpha(\gamma))^2} - \sqrt{r_{i\_in}^2 - (x\alpha(\gamma))^2}\right] & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$Q1(\gamma) := \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[ r_{o\_in}^2 - (x\alpha(\gamma))^2 \right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

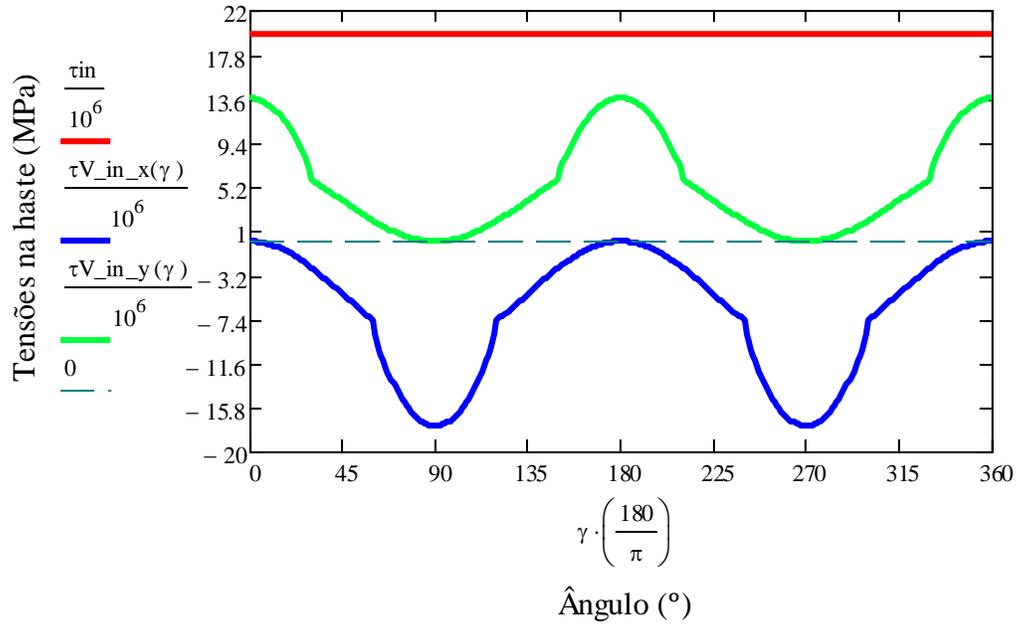
$$Q3(\gamma) := \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[ r_{i\_in}^2 - (x\alpha(\gamma))^2 \right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$Q_{in\_y}(\gamma) := \begin{cases} Q1(\gamma) & \text{if } r_{i\_in} < |x\alpha(\gamma)| \leq r_{o\_in} \\ Q1(\gamma) - Q3(\gamma) & \text{otherwise} \end{cases}$$



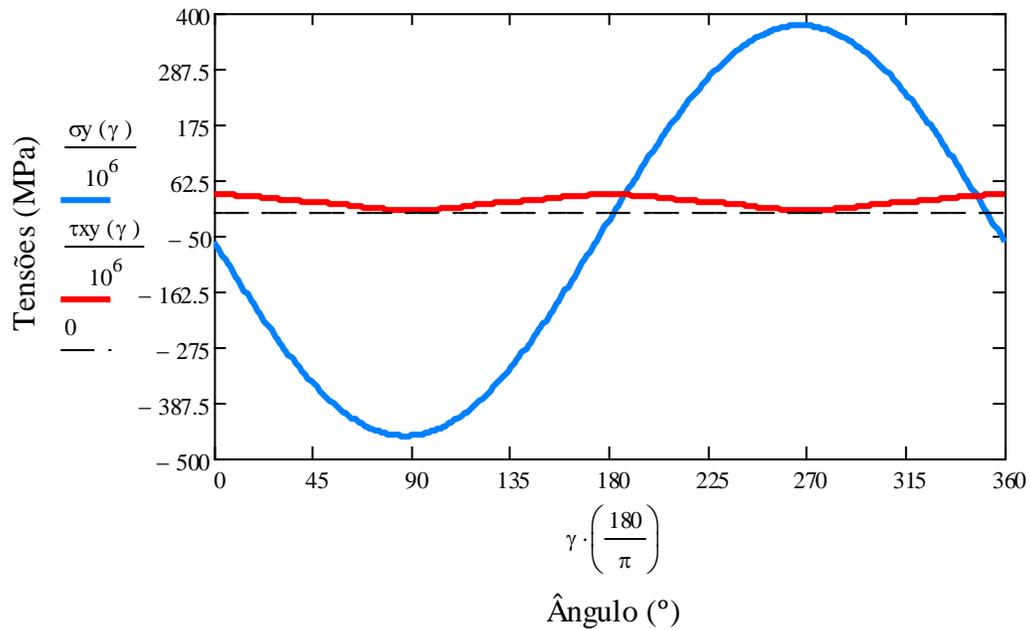
$$\tau_{V\_in\_x}(\gamma) := \left( \frac{V_x Q_{in\_y}(\gamma)}{I_{in\_y} \cdot t_{in\_y}(\gamma)} \right)$$

$$\tau V_{in\_y}(\gamma) := \left( \frac{V_y \cdot Q_{in\_x}(\gamma)}{I_{in\_x} \cdot t_{in\_x}(\gamma)} \right)$$

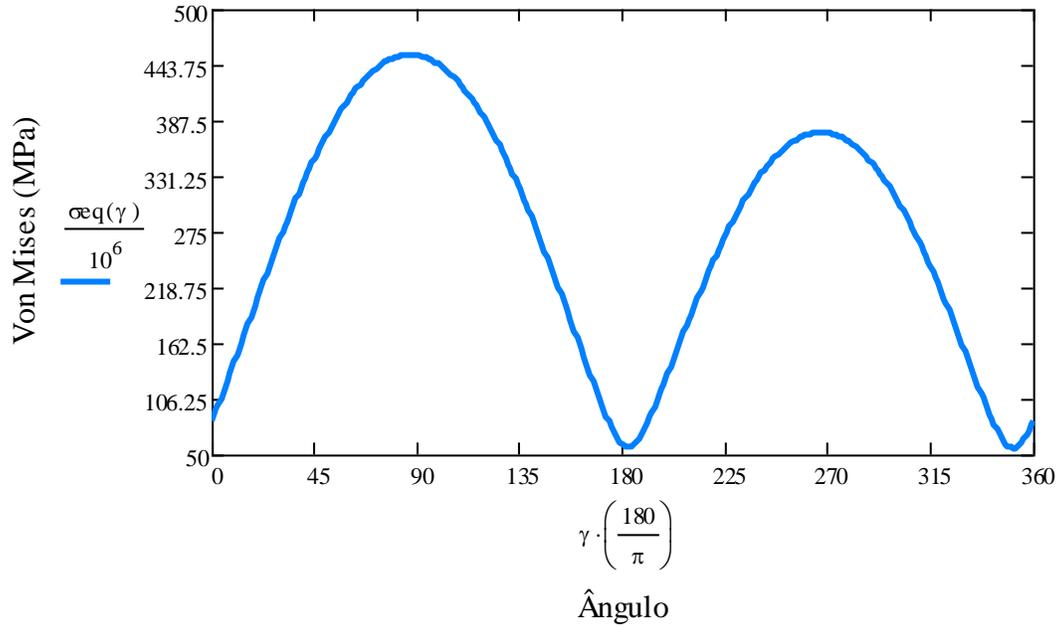


$$\sigma_y(\gamma) := \sigma N_{in} + \sigma B_{in\_x}(\gamma) + \sigma B_{in\_y}(\gamma)$$

$$\tau_{xy}(\gamma) := \tau_{in} + \tau V_{in\_x}(\gamma) + \tau V_{in\_y}(\gamma)$$

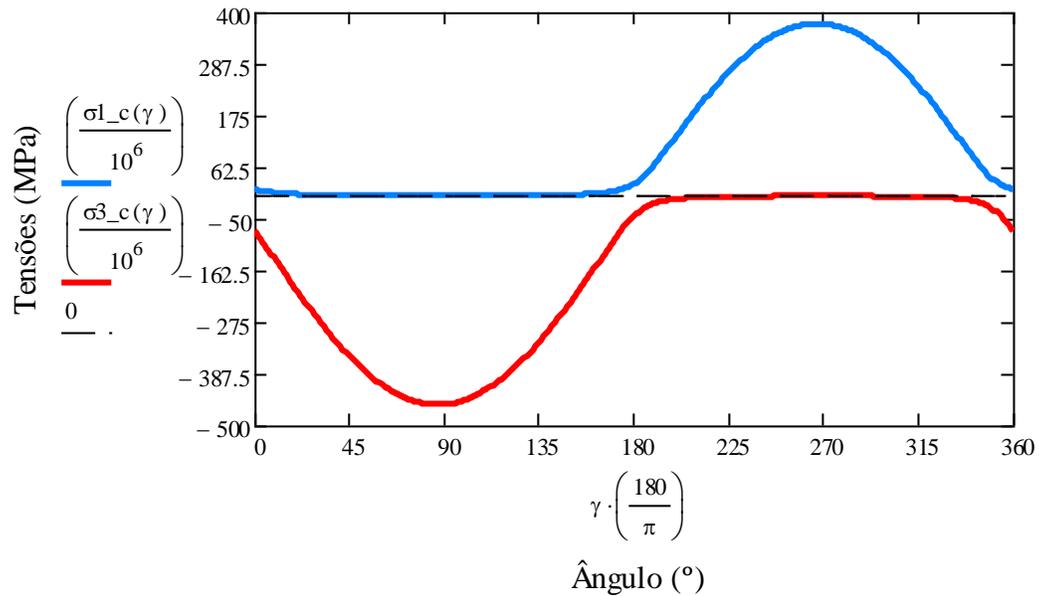


$$\sigma_{eq}(\gamma) := \sqrt{(\sigma_y(\gamma))^2 + 3 \cdot (\tau_{xy}(\gamma))^2}$$



$$\sigma_{1_c}(\gamma) := \frac{\sigma_y(\gamma)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y(\gamma)}{2}\right)^2 + (\tau_{xy}(\gamma))^2}$$

$$\sigma_{3_c}(\gamma) := \frac{\sigma_y(\gamma)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_y(\gamma)}{2}\right)^2 + (\tau_{xy}(\gamma))^2}$$



## APÊNDICE E: Programação no Mathcad - Modelo Haste e Osso

$$r_o := 15.5\text{mm} \quad r_i := 7.75\text{mm} \quad r_{o\_in} := 5\text{mm} \quad r_{i\_in} := 2.5\text{mm}$$

$$E_b := 20\text{GPa} \quad E_{in} := 190\text{GPa} \quad \text{Aço inox}$$

$$\nu_b := 0.23 \quad \nu_{in} := 0.3$$

$$G_b := \frac{E_b}{2 \cdot (1 + \nu_b)} \quad G_{in} := \frac{E_{in}}{2 \cdot (1 + \nu_{in})}$$

$$G_b = 8.091 \times 10^9 \text{ Pa} \quad G_{in} = 7.308 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$\phi := 0$$

$$V_g := (-1062 \ -130 \ -2800 \ 430 \ 0 \ 1160 \ 78 \ 560 \ 525 \ 0 \ 0 \ -1200)\text{N}$$

$$\begin{aligned} d_1 &:= [(0.050741 - 0.0006)\text{m}] & d_1 &= 0.05\text{m} \\ d_2 &:= (-0.002718 + -0.004)\text{m} & d_2 &= -6.718 \times 10^{-3} \text{m} \\ d_3 &:= (0.13295 + 0.050)\text{m} & d_3 &= 0.183\text{m} \\ d_4 &:= (-0.013483 - 0.0006)\text{m} & d_4 &= -0.014\text{m} \\ d_5 &:= (-0.006497 + -0.004)\text{m} & d_5 &= -0.01\text{m} \\ d_6 &:= (0.1148 + 0.050)\text{m} & d_6 &= 0.165\text{m} \\ d_7 &:= (0.018792 - 0.0006)\text{m} & d_7 &= 0.018\text{m} \\ d_8 &:= (-0.02929 + -0.004)\text{m} & d_8 &= -0.033\text{m} \\ d_9 &:= (0.0588 + 0.050)\text{m} & d_9 &= 0.109\text{m} \\ d_{10} &:= (-0.024585 - 0.0006)\text{m} & d_{10} &= -0.025\text{m} \\ d_{11} &:= (-0.0042044 + -0.004)\text{m} & d_{11} &= -8.204 \times 10^{-3} \text{m} \\ d_{12} &:= (0.083 + 0.050)\text{m} & d_{12} &= 0.133\text{m} \end{aligned}$$

$$d := (d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6 \ d_7 \ d_8 \ d_9 \ d_{10} \ d_{11} \ d_{12})$$

$$i := 0..3$$

$$Mg_{0,3+i+0} := d_{0,3+i+1} \cdot Vg_{0,3+i+2} - d_{0,3+i+2} \cdot Vg_{0,3+i+1}$$

$$Mg_{0,3+i+1} := d_{0,3+i+2} \cdot Vg_{0,3+i+0} - d_{0,3+i+0} \cdot Vg_{0,3+i+2}$$

$$Mg_{0,3+i+2} := d_{0,3+i+0} \cdot Vg_{0,3+i+1} - d_{0,3+i+1} \cdot Vg_{0,3+i+0}$$

$$Mg = \begin{array}{c|ccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 42.594 & -53.898 & -13.653 & -12.177 & 87.2 & 4.514 & \dots \end{array} \text{ J}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_{0,3+i+0} &:= V_{g_{0,3+i+0}} \cdot \cos(\phi) + V_{g_{0,3+i+1}} \cdot \sin(\phi) \\
 V_{0,3+i+1} &:= -V_{g_{0,3+i+0}} \cdot \sin(\phi) + V_{g_{0,3+i+1}} \cdot \cos(\phi) \\
 V_{0,3+i+2} &:= V_{g_{0,3+i+2}}
 \end{aligned}$$

$$V =$$

	0	1	2	3	4	5
0	$-1.062 \cdot 10^3$	-130	$-2.8 \cdot 10^3$	430	0	...

$$V_x := \sum_i V_{0,3+i+0} \quad V_x = -554 \text{ N}$$

$$V_y := \sum_i V_{0,3+i+1} \quad V_y = 430 \text{ N}$$

$$V_z := \sum_i V_{0,3+i+2} \quad V_z = -2.315 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\begin{aligned}
 M_{0,3+i+0} &:= M_{g_{0,3+i+0}} \cdot \cos(\phi) + M_{g_{0,3+i+1}} \cdot \sin(\phi) \\
 M_{0,3+i+1} &:= -M_{g_{0,3+i+0}} \cdot \sin(\phi) + M_{g_{0,3+i+1}} \cdot \cos(\phi) \\
 M_{0,3+i+2} &:= M_{g_{0,3+i+2}}
 \end{aligned}$$

$$M =$$

	0	1	2	3	4	5	6
0	42.594	-53.898	-13.653	-12.177	87.2	4.514	...

$$M_x := \sum_i M_{0,3+i+0} \quad M_x = -38.143 \text{ J}$$

$$M_y := \sum_i M_{0,3+i+1} \quad M_y = 2.016 \text{ J}$$

$$T := \sum_i M_{0,3+i+2} \quad T = 3.645 \text{ J}$$

$$\gamma := 0, \left( \frac{\pi}{180} \right) .. 2 \cdot \pi$$

$$A_{in} := \pi \cdot (r_{o\_in}^2 - r_{i\_in}^2)$$

$$A_{in} = 5.89 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$A_b := \pi \cdot (r_o^2 - r_i^2)$$

$$A_b = 5.661 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$a_1 := \frac{A_b}{A_{in}} \quad a_2 := \frac{A_{in}}{A_b}$$

$$a_1 = 9.61 \quad a_2 = 0.104$$

$$n_1 := \frac{E_b}{E_{in}} \quad n_2 := \frac{E_{in}}{E_b}$$

$$n_1 = 0.105 \quad n_2 = 9.5$$

$$\sigma_{N\_in} := \left( \frac{1}{1 + a_1 n_1} \right) \cdot \frac{V_z}{A_{in}}$$

$$\sigma_{N\_in} = -1.954 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$\sigma_{N\_b} := \left( \frac{1}{1 + a_2 n_2} \right) \cdot \frac{V_z}{A_b}$$

$$\sigma_{N\_b} = -2.057 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$I_{b\_x} := \frac{\pi}{4} \cdot (r_o^4 - r_i^4)$$

$$I_{b\_x} = 4.25 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_{b\_y} := I_{b\_x}$$

$$I_{b\_y} = 4.25 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_{in\_x} := \frac{\pi}{4} \cdot (r_{o\_in}^4 - r_{i\_in}^4)$$

$$I_{in\_x} = 4.602 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$I_{in\_y} := I_{in\_x}$$

$$I_{in\_y} = 4.602 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$s_x := \frac{I_{b\_x}}{I_{in\_x}} \quad s_{x2} := \frac{I_{in\_x}}{I_{b\_x}}$$

$$s_x = 92.352 \quad s_{x2} = 0.011$$

$$s_y := \frac{I_{b\_y}}{I_{in\_y}} \quad s_{y2} := \frac{I_{in\_y}}{I_{b\_y}}$$

$$s_y = 92.352 \quad s_{y2} = 0.011$$

$$x_c(\gamma) := -r_{o\_in} \cdot \cos(\gamma)$$

$$x_{c2}(\gamma) := -r_o \cdot \cos(\gamma)$$

$$y_c(\gamma) := r_{o\_in} \cdot \sin(\gamma)$$

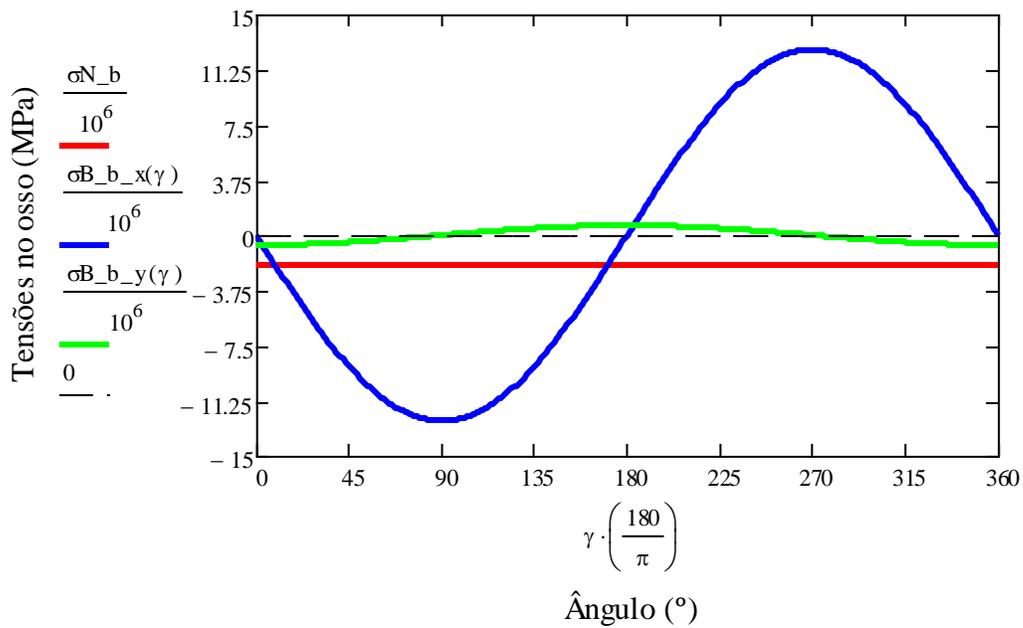
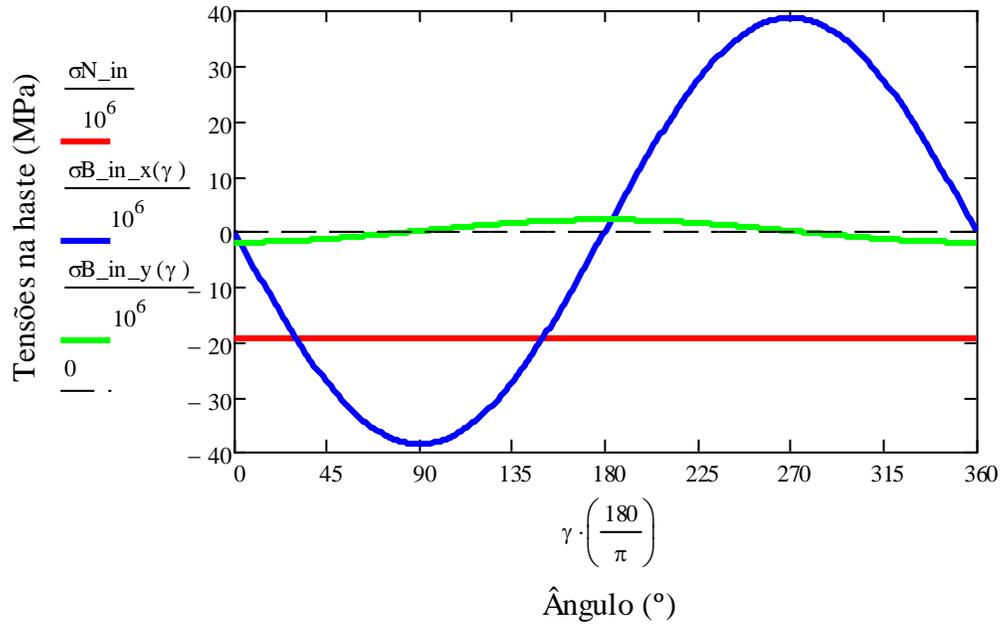
$$y_{c2}(\gamma) := r_o \cdot \sin(\gamma)$$

$$\sigma_{B\_in\_x}(\gamma) := \left( \frac{1}{1 + n_1 \cdot s_x} \right) \cdot \frac{M_x \cdot y_c(\gamma)}{I_{in\_x}}$$

$$\sigma_{B\_b\_x}(\gamma) := \left( \frac{1}{1 + n_2 \cdot s_{x2}} \right) \cdot \frac{M_x \cdot y_{c2}(\gamma)}{I_{b\_x}}$$

$$\sigma_{B\_in\_y}(\gamma) := \left( \frac{1}{1 + n_1 \cdot s_y} \right) \cdot \frac{M_y \cdot x_c(\gamma)}{I_{in\_y}}$$

$$\sigma_{B\_b\_y}(\gamma) := \left( \frac{1}{1 + n_2 \cdot s_{y2}} \right) \cdot \frac{M_y \cdot x_{c2}(\gamma)}{I_{b\_y}}$$



$$J_b := \frac{\pi}{2} \cdot (r_o^4 - r_i^4)$$

$$J_b = 8.5 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$J_{in} := \frac{\pi}{2} \cdot (r_{o\_in}^4 - r_{i\_in}^4)$$

$$J_{in} = 9.204 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$p := \frac{J_b}{J_{in}}$$

$$p_2 := \frac{J_{in}}{J_b}$$

$$p = 92.352$$

$$p_2 = 0.011$$

$$q := \frac{G_b}{G_{in}}$$

$$q_2 := \frac{G_{in}}{G_b}$$

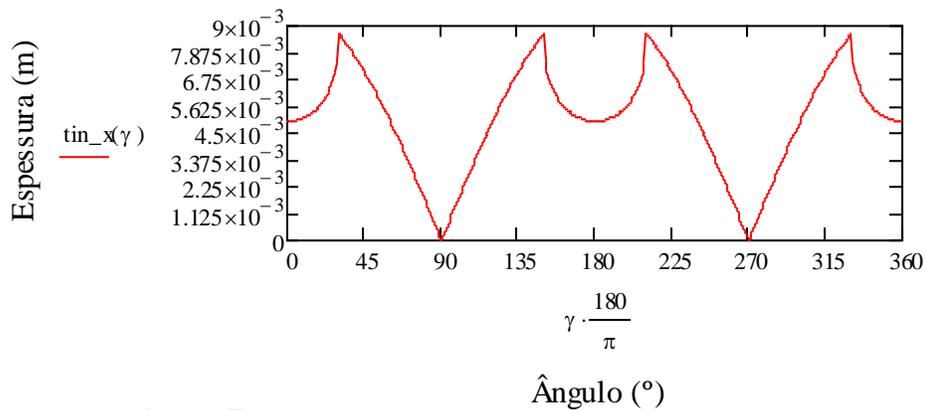
$$q = 0.111$$

$$q_2 = 9.032$$

$$\tau_{in} := \frac{1}{(1 + p \cdot q)} \cdot \frac{T \cdot r_{o\_in}}{J_{in}}$$

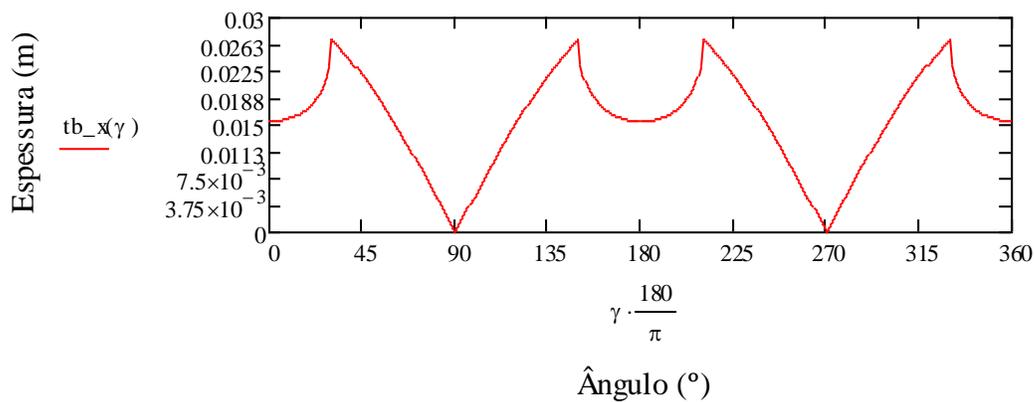
$$\tau_{in} = 1.764 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\tau_{in\_x}(\gamma) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{r_{o\_in}^2 - (y_c(\gamma))^2} & \text{if } r_{i\_in} < |y_c(\gamma)| \leq r_{o\_in} \\ 2 \left[ \sqrt{r_{o\_in}^2 - (y_c(\gamma))^2} - \sqrt{r_{i\_in}^2 - (y_c(\gamma))^2} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\tau_b := \frac{1}{(1 + p_2 \cdot q_2)} \cdot \frac{T \cdot r_o}{J_b}$$

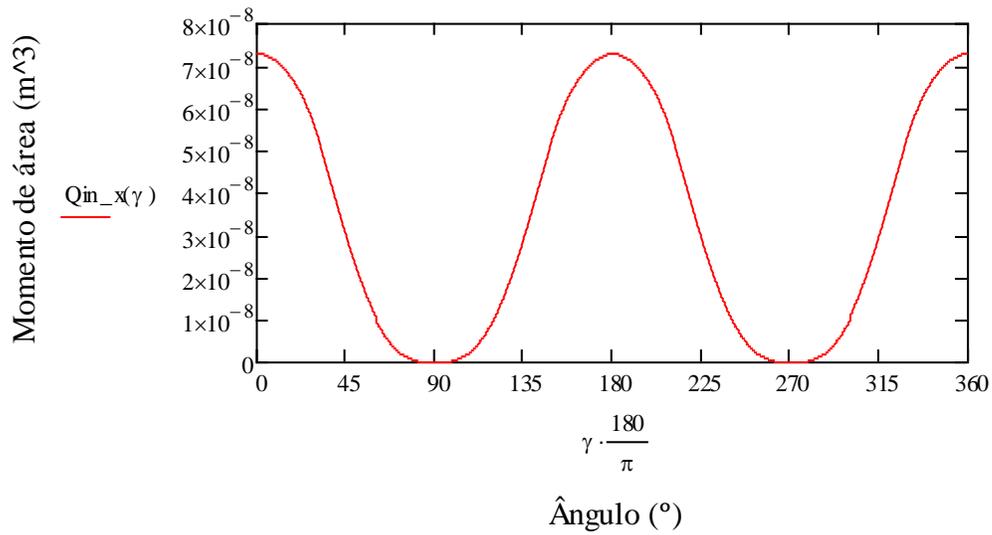
$$\tau_{b\_x}(\gamma) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{r_o^2 - (y_{c2}(\gamma))^2} & \text{if } r_i < |y_{c2}(\gamma)| \leq r_o \\ 2 \left[ \sqrt{r_o^2 - (y_{c2}(\gamma))^2} - \sqrt{r_i^2 - (y_{c2}(\gamma))^2} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$Q1(\gamma) := \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[ r_{o\_in}^2 - (y_c(\gamma))^2 \right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$Q3(\gamma) := \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[ r_{i\_in}^2 - (y_c(\gamma))^2 \right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

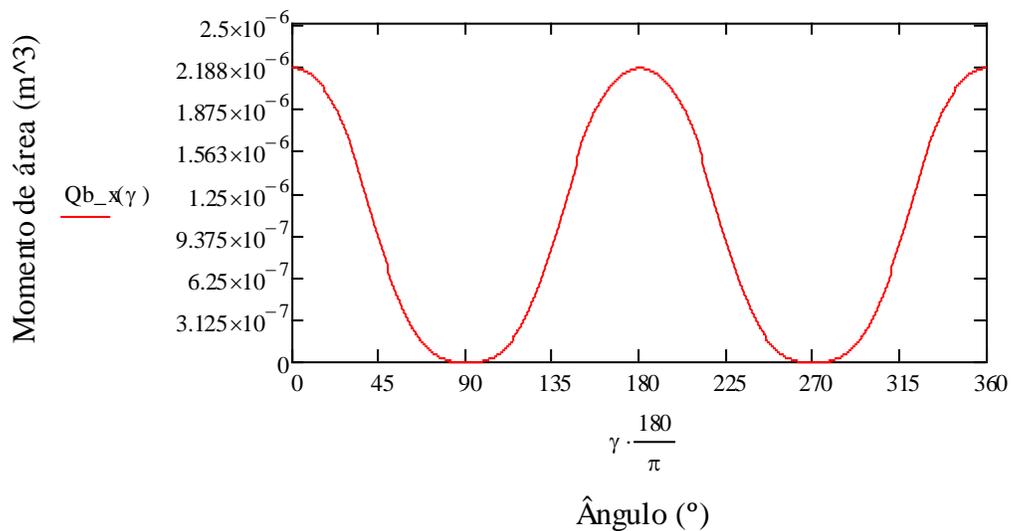
$$Q_{in\_x}(\gamma) := \begin{cases} Q1(\gamma) & \text{if } r_{i\_in} < |y_c(\gamma)| \leq r_{o\_in} \\ Q1(\gamma) - Q3(\gamma) & \text{otherwise} \end{cases}$$



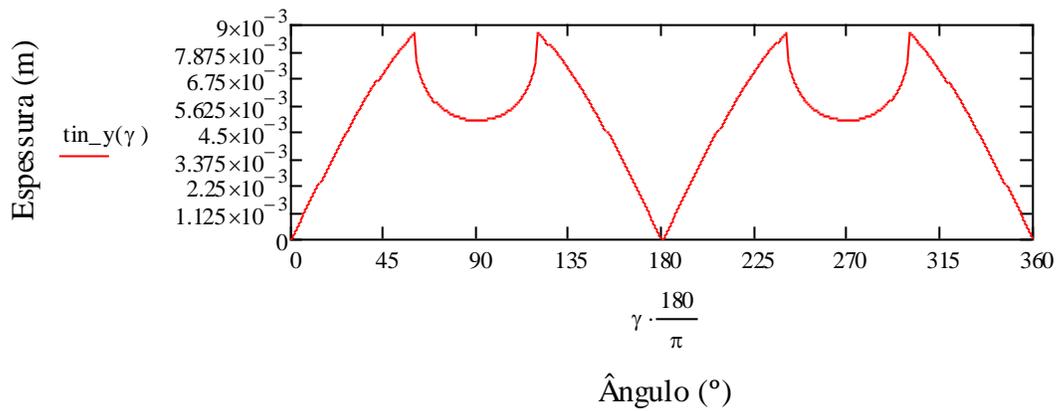
$$Q12(\gamma) := \frac{2}{3} \cdot \left[ r_o^2 - (y_c2(\gamma))^2 \right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$Q32(\gamma) := \frac{2}{3} \cdot \left[ r_i^2 - (y_c2(\gamma))^2 \right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

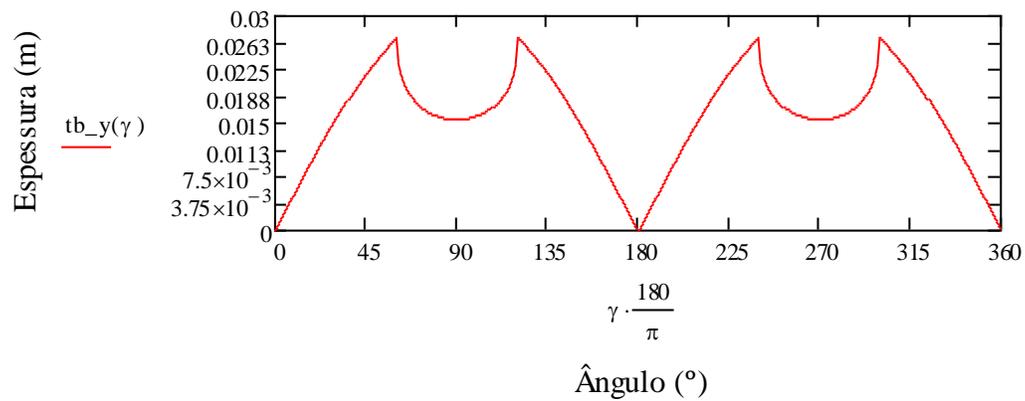
$$Qb\_x(\gamma) := \begin{cases} Q12(\gamma) & \text{if } r_i < |y_c2(\gamma)| \leq r_o \\ Q12(\gamma) - Q32(\gamma) & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$tin\_y(\gamma) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{r_{o\_in}^2 - (x\alpha(\gamma))^2} & \text{if } r_{i\_in} < |x\alpha(\gamma)| \leq r_{o\_in} \\ 2 \left[ \sqrt{r_{o\_in}^2 - (x\alpha(\gamma))^2} - \sqrt{r_{i\_in}^2 - (x\alpha(\gamma))^2} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$



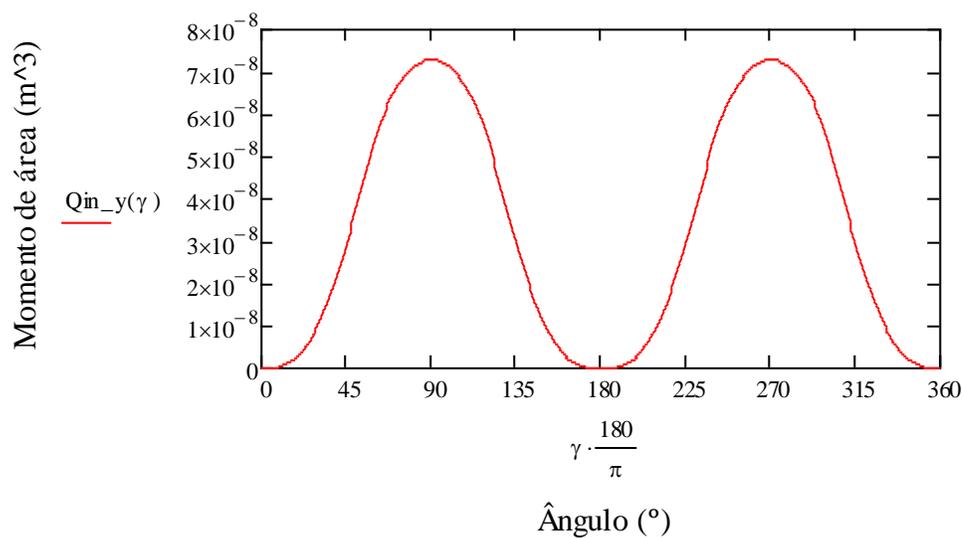
$$tb_y(\gamma) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{ro^2 - (xc\alpha\gamma)^2} & \text{if } ri < |xc\alpha\gamma| \leq ro \\ 2 \left[ \sqrt{ro^2 - (xc\alpha\gamma)^2} - \sqrt{ri^2 - (xc\alpha\gamma)^2} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$Q1(\gamma) := \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[ro_{in}^2 - (xc\alpha\gamma)^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$Q3(\gamma) := \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[ri_{in}^2 - (xc\alpha\gamma)^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

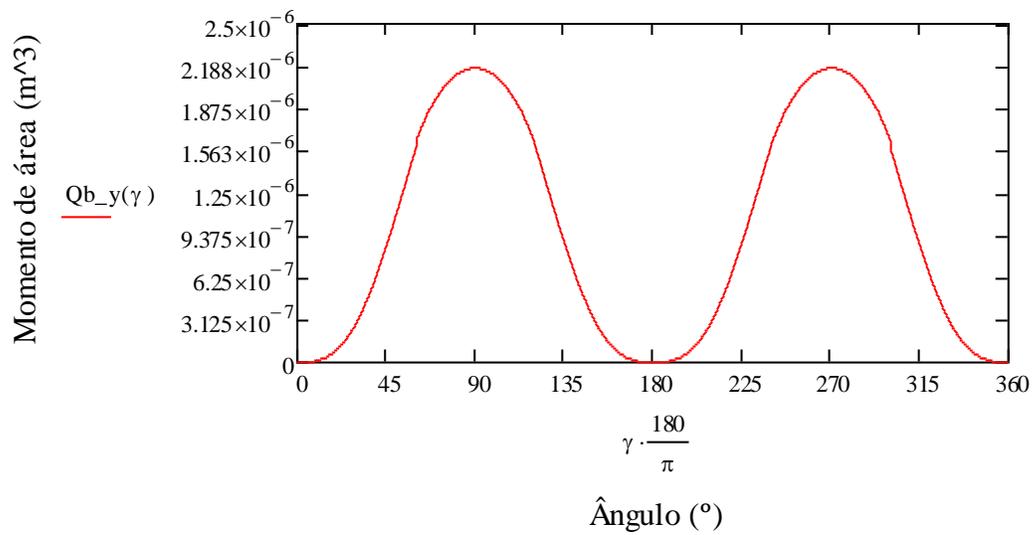
$$Qin_y(\gamma) := \begin{cases} Q1(\gamma) & \text{if } ri_{in} < |xc\alpha\gamma| \leq ro_{in} \\ Q1(\gamma) - Q3(\gamma) & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$Q_{12}(\gamma) := \frac{2}{3} \cdot \left[ r_o^2 - (x_c \mathcal{A}(\gamma))^2 \right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$Q_{32}(\gamma) := \frac{2}{3} \cdot \left[ r_i^2 - (x_c \mathcal{A}(\gamma))^2 \right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$Q_{b\_y}(\gamma) := \begin{cases} Q_{12}(\gamma) & \text{if } r_i < |x_c \mathcal{A}(\gamma)| \leq r_o \\ Q_{12}(\gamma) - Q_{32}(\gamma) & \text{otherwise} \end{cases}$$

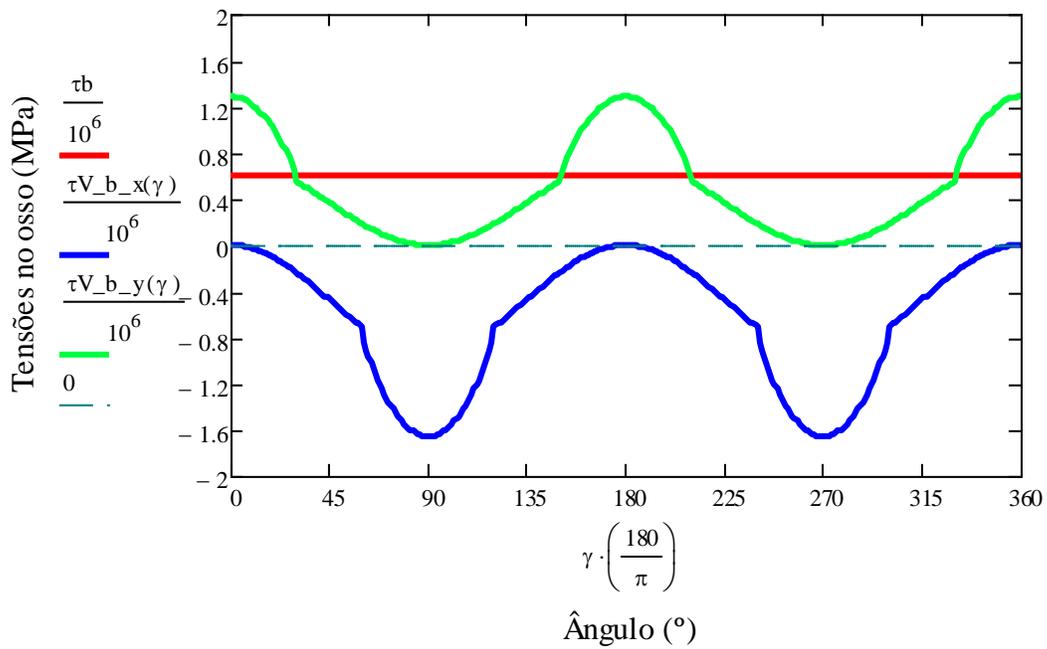
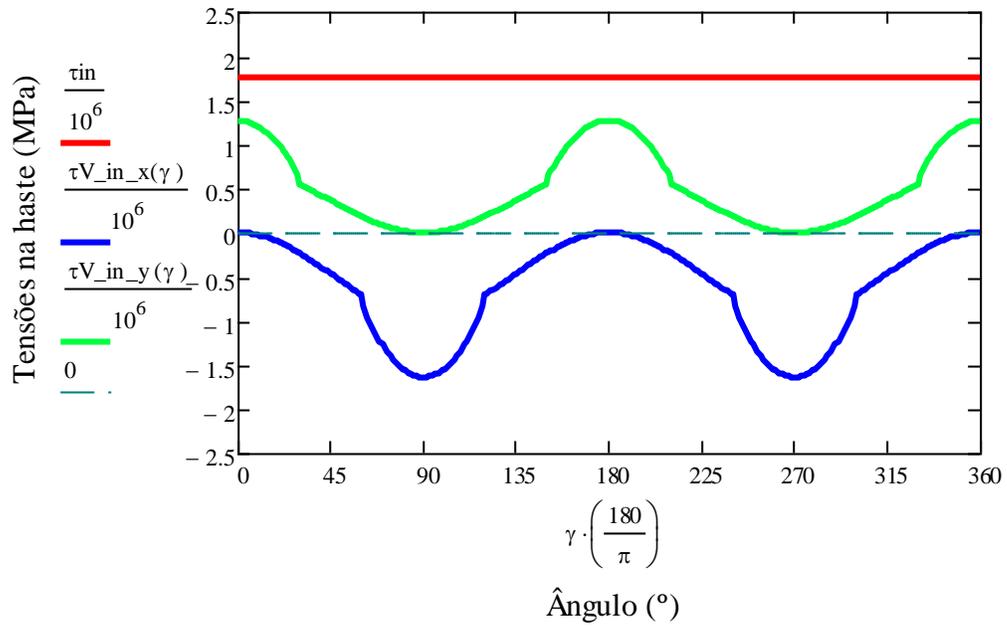


$$\tau_{V\_in\_x}(\gamma) := \frac{1}{1 + n1 \cdot s_y} \cdot \left( \frac{V_x \cdot Q_{in\_y}(\gamma)}{I_{in\_y} \cdot t_{in\_y}(\gamma)} \right)$$

$$\tau_{V\_in\_y}(\gamma) := \frac{1}{1 + n1 \cdot s_x} \cdot \left( \frac{V_y \cdot Q_{in\_x}(\gamma)}{I_{in\_x} \cdot t_{in\_x}(\gamma)} \right)$$

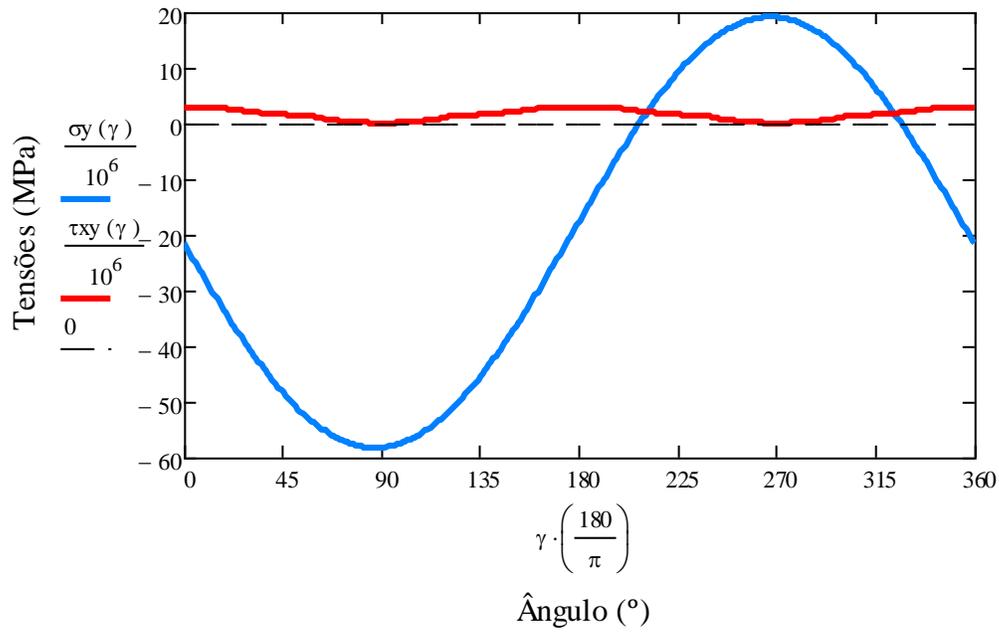
$$\tau_{V\_b\_x}(\gamma) := \frac{1}{1 + n2 \cdot s_y^2} \cdot \left( \frac{V_x \cdot Q_{b\_y}(\gamma)}{I_{b\_y} \cdot t_{b\_y}(\gamma)} \right)$$

$$\tau_{V\_b\_y}(\gamma) := \frac{1}{1 + n2 \cdot s_x^2} \cdot \left( \frac{V_y \cdot Q_{b\_x}(\gamma)}{I_{b\_x} \cdot t_{b\_x}(\gamma)} \right)$$



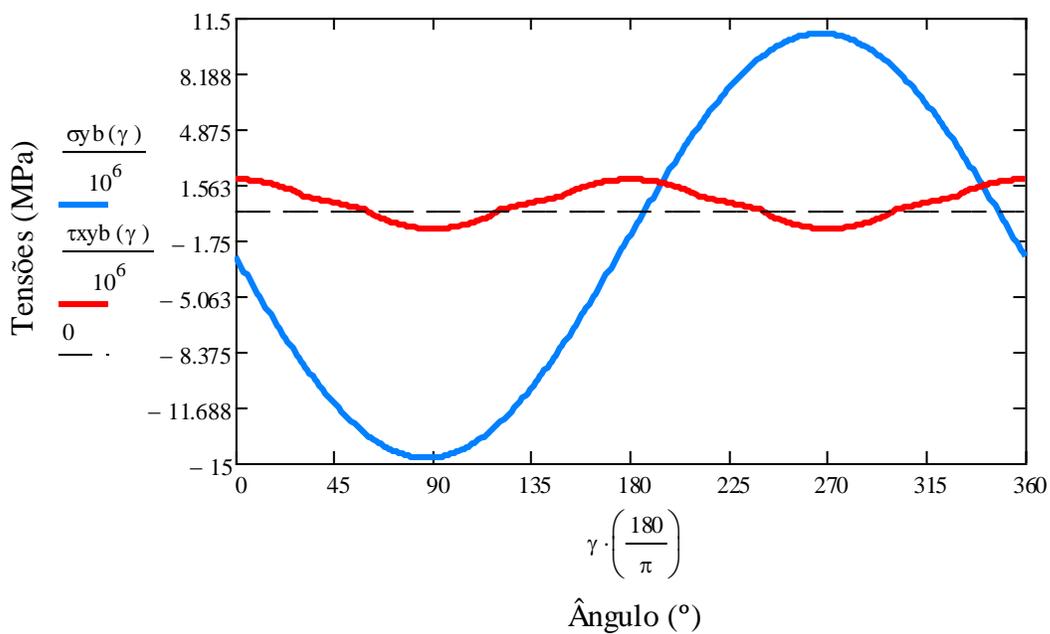
$$\sigma_y(\gamma) := \sigma N_{in} + \sigma B_{in_x}(\gamma) + \sigma B_{in_y}(\gamma)$$

$$\tau_{xy}(\gamma) := \tau_{in} + \tau V_{in_x}(\gamma) + \tau V_{in_y}(\gamma)$$

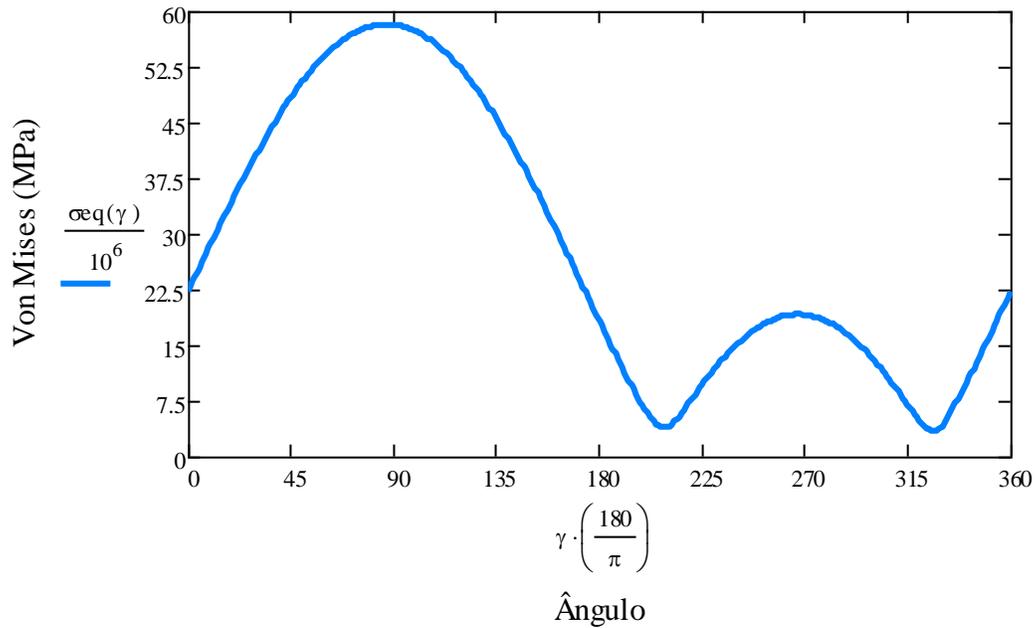


$$\sigma_{yb}(\gamma) := \sigma_{N\_b} + \sigma_{B\_b\_x}(\gamma) + \sigma_{B\_b\_y}(\gamma)$$

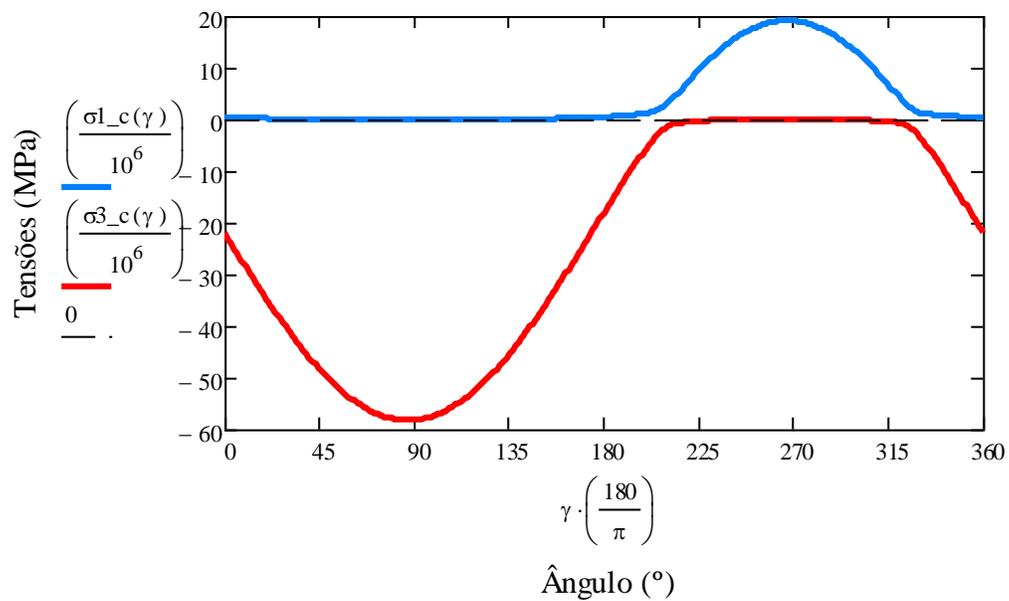
$$\tau_{xyb}(\gamma) := \tau_b + \tau_{V\_b\_x}(\gamma) + \tau_{V\_b\_y}(\gamma)$$



$$\sigma_{eq}(\gamma) := \sqrt{(\sigma_y(\gamma))^2 + 3 \cdot (\tau_{xy}(\gamma))^2}$$

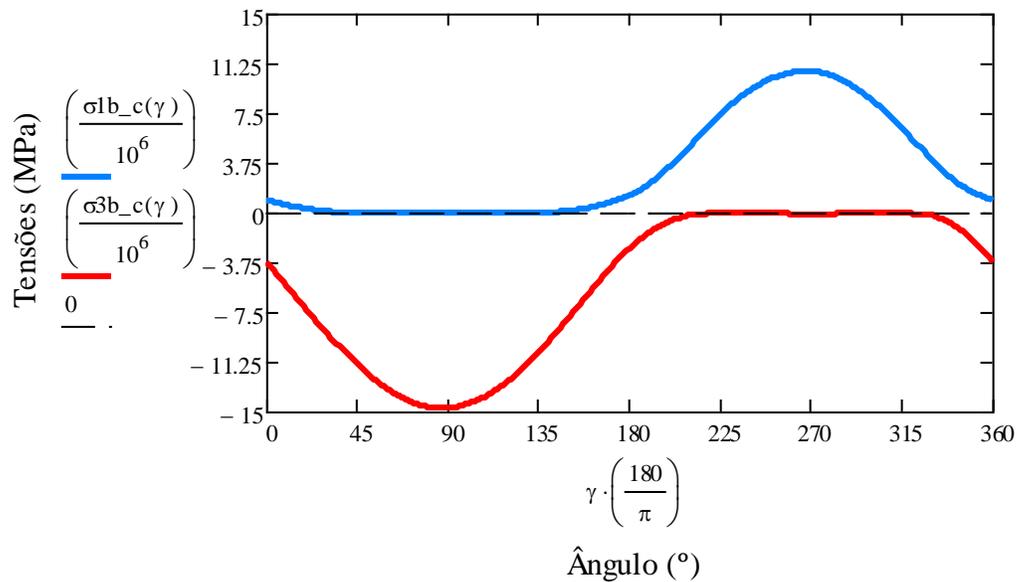


$$\sigma_{1\_c}(\gamma) := \frac{\sigma_y(\gamma)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y(\gamma)}{2}\right)^2 + (\tau_{xy}(\gamma))^2} \quad \sigma_{3\_c}(\gamma) := \frac{\sigma_y(\gamma)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_y(\gamma)}{2}\right)^2 + (\tau_{xy}(\gamma))^2}$$



$$\sigma_{1b\_c}(\gamma) := \frac{\sigma_{yb}(\gamma)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{yb}(\gamma)}{2}\right)^2 + (\tau_{xyb}(\gamma))^2}$$

$$\sigma_{3b\_c}(\gamma) := \frac{\sigma_{yb}(\gamma)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{yb}(\gamma)}{2}\right)^2 + (\tau_{xyb}(\gamma))^2}$$



$$r_{o_b} := 15.5 \text{ mm}$$

$$r_{i_b} := 7.75 \text{ mm}$$

$$r_{o_{in}} := 5 \text{ mm}$$

$$r_{i_{in}} := 2.5 \text{ mm}$$

$$E_b := 20 \text{ GPa}$$

$$E_{in} := 114 \text{ GPa}$$

Liga de titânio

$$\nu_b := 0.23$$

$$\nu_{in} := 0.3$$

$$G_b := \frac{E_b}{2 \cdot (1 + \nu_b)}$$

$$G_{in} := \frac{E_{in}}{2 \cdot (1 + \nu_{in})}$$

$$G_b = 8.091 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$G_{in} = 4.385 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$\phi_b := 0$$

$$V_g := (-1062 \ -130 \ -2800 \ 430 \ 0 \ 1160 \ 78 \ 560 \ 525 \ 0 \ 0 \ -1200) \text{ N}$$

$$d1 := [(0.050741 - 0.0006) \text{ m}]$$

$$d1 = 0.05 \text{ m}$$

$$d2 := (-0.002718 + 0.004) \text{ m}$$

$$d2 = -6.718 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$d3 := (0.13295 + 0.050) \text{ m}$$

$$d3 = 0.183 \text{ m}$$

$$d4 := (-0.013483 - 0.0006) \text{ m}$$

$$d4 = -0.014 \text{ m}$$

$$d5 := (-0.006497 + 0.004) \text{ m}$$

$$d5 = -0.01 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}
 d6 &:= (0.1148 + 0.050)m & d6 &= 0.165m \\
 d7 &:= (0.018792 - 0.0006)m & d7 &= 0.018m \\
 d8 &:= (-0.02929 + -0.004)m & d8 &= -0.033m \\
 d9 &:= (0.0588 + 0.050)m & d9 &= 0.109m \\
 d10 &:= (-0.024585 - 0.0006)m & d10 &= -0.025m \\
 d11 &:= (-0.0042044 + -0.004)m & d11 &= -8.204 \times 10^{-3} m \\
 d12 &:= (0.083 + 0.050)m & d12 &= 0.133m
 \end{aligned}$$

$$d := (d1 \ d2 \ d3 \ d4 \ d5 \ d6 \ d7 \ d8 \ d9 \ d10 \ d11 \ d12)$$

$$i := 0..3$$

$$Mg_{0,3:i+0} := d_{0,3:i+1} \cdot Vg_{0,3:i+2} - d_{0,3:i+2} \cdot Vg_{0,3:i+1}$$

$$Mg_{0,3:i+1} := d_{0,3:i+2} \cdot Vg_{0,3:i+0} - d_{0,3:i+0} \cdot Vg_{0,3:i+2}$$

$$Mg_{0,3:i+2} := d_{0,3:i+0} \cdot Vg_{0,3:i+1} - d_{0,3:i+1} \cdot Vg_{0,3:i+0}$$

$$Mg =$$

	0	1	2	3	4	5	6
0	42.594	-53.898	-13.653	-12.177	87.2	4.514	...

$$V_{0,3:i+0} := Vg_{0,3:i+0} \cdot \cos(\phi) + Vg_{0,3:i+1} \cdot \sin(\phi)$$

$$V_{0,3:i+1} := -Vg_{0,3:i+0} \cdot \sin(\phi) + Vg_{0,3:i+1} \cdot \cos(\phi)$$

$$V_{0,3:i+2} := Vg_{0,3:i+2}$$

$$V =$$

	0	1	2	3	4
0	$-1.062 \cdot 10^3$	-130	$-2.8 \cdot 10^3$	430	...

$$V_x := \sum_i V_{0,3:i+0} \quad V_x = -554N$$

$$V_y := \sum_i V_{0,3:i+1} \quad V_y = 430N$$

$$V_z := \sum_i V_{0,3:i+2} \quad V_z = -2.315 \times 10^3 N$$

$$M_{0,3:i+0} := Mg_{0,3:i+0} \cdot \cos(\phi) + Mg_{0,3:i+1} \cdot \sin(\phi)$$

$$M_{0,3:i+1} := -Mg_{0,3:i+0} \cdot \sin(\phi) + Mg_{0,3:i+1} \cdot \cos(\phi)$$

$$M_{0,3:i+2} := Mg_{0,3:i+2}$$

$$M =$$

	0	1	2	3	4	5	6
0	42.594	-53.898	-13.653	-12.177	87.2	4.514	...

$$\underline{M_x} := \sum_i M_{0,3 \cdot i+0}$$

$$M_x = -38.143$$

$$\underline{M_y} := \sum_i M_{0,3 \cdot i+1}$$

$$M_y = 2.016$$

$$\underline{T} := \sum_i M_{0,3 \cdot i+2}$$

$$T = 3.645$$

$$\gamma := 0, \left( \frac{\pi}{180} \right) .. 2 \cdot \pi$$

$$\underline{A_{in}} := \pi \cdot (r_{o\_in}^2 - r_{i\_in}^2)$$

$$A_{in} = 5.89 \times 10^{-5} \text{ m}^2$$

$$\underline{A_b} := \pi \cdot (r_o^2 - r_i^2)$$

$$A_b = 5.661 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\underline{a1} := \frac{A_b}{A_{in}} \quad \underline{a2} := \frac{A_{in}}{A_b}$$

$$a1 = 9.61 \quad a2 = 0.104$$

$$\underline{n1} := \frac{E_b}{E_{in}} \quad \underline{n2} := \frac{E_{in}}{E_b}$$

$$n1 = 0.175 \quad n2 = 5.7$$

$$\underline{\sigma_{N\_in}} := \left( \frac{1}{1 + a1n1} \right) \cdot \frac{V_z}{A_{in}}$$

$$\sigma_{N\_in} = -1.463 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$\underline{\sigma_{N\_b}} := \left( \frac{1}{1 + a2n2} \right) \cdot \frac{V_z}{A_b}$$

$$\sigma_{N\_b} = -2.567 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$\underline{I_{b\_x}} := \frac{\pi}{4} \cdot (r_o^4 - r_i^4)$$

$$I_{b\_x} = 4.25 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$\underline{I_{b\_y}} := I_{b\_x}$$

$$I_{b\_y} = 4.25 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$\underline{I_{in\_x}} := \frac{\pi}{4} \cdot (r_{o\_in}^4 - r_{i\_in}^4)$$

$$I_{in\_x} = 4.602 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$\underline{I_{in\_y}} := I_{in\_x}$$

$$I_{in\_y} = 4.602 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$\underline{s_x} := \frac{I_{b\_x}}{I_{in\_x}} \quad \underline{s_{x2}} := \frac{I_{in\_x}}{I_{b\_x}}$$

$$s_x = 92.352 \quad s_{x2} = 0.011$$

$$\underline{s_y} := \frac{I_{b\_y}}{I_{in\_y}} \quad \underline{s_{y2}} := \frac{I_{in\_y}}{I_{b\_y}}$$

$$s_y = 92.352 \quad s_{y2} = 0.011$$

$$x(\gamma) := -r_{o\_in} \cdot \cos(\gamma)$$

$$x(\gamma) := -r_o \cdot \cos(\gamma)$$

$$y(\gamma) := r_{o\_in} \cdot \sin(\gamma)$$

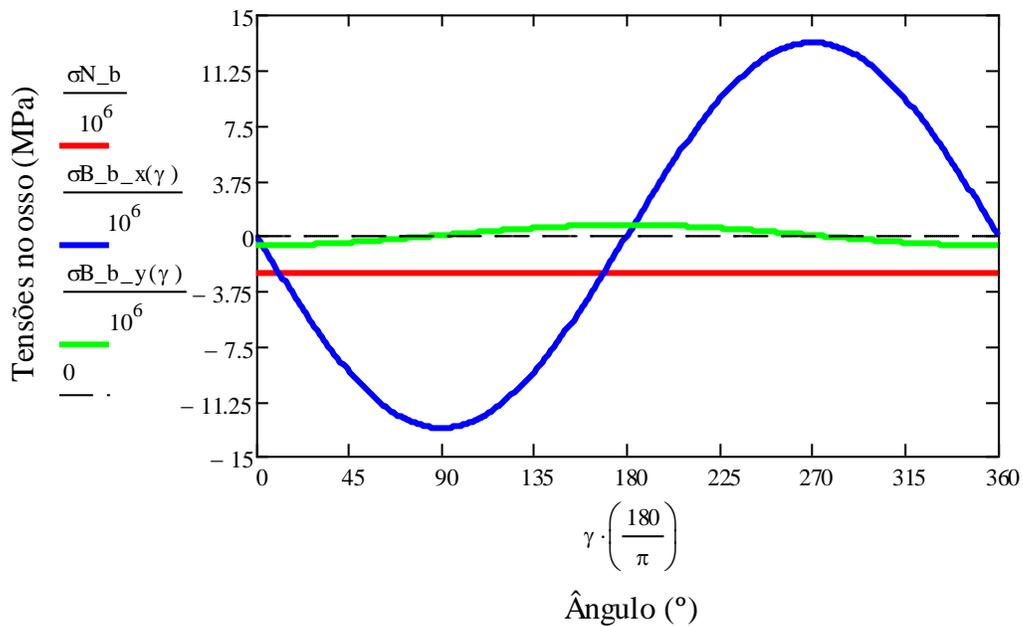
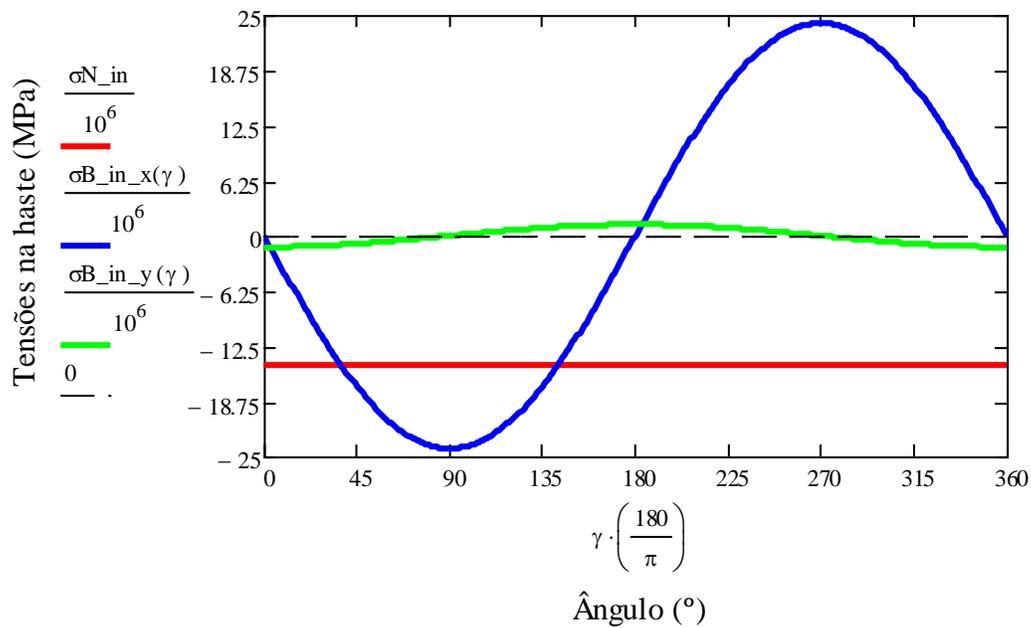
$$y(\gamma) := r_o \cdot \sin(\gamma)$$

$$\sigma_{B\_in\_x}(\gamma) := \left( \frac{1}{1 + n1 \cdot s_x} \right) \cdot \frac{M_x \cdot y(\gamma)}{I_{in\_x}}$$

$$\sigma_{B\_b\_x}(\gamma) := \left( \frac{1}{1 + n2 \cdot s_x^2} \right) \cdot \frac{M_x \cdot y(\gamma)}{I_{b\_x}}$$

$$\sigma_{B\_in\_y}(\gamma) := \left( \frac{1}{1 + n1 \cdot s_y} \right) \cdot \frac{M_y \cdot x(\gamma)}{I_{in\_y}}$$

$$\sigma_{B\_b\_y}(\gamma) := \left( \frac{1}{1 + n2 \cdot s_y^2} \right) \cdot \frac{M_y \cdot x(\gamma)}{I_{b\_y}}$$



$$J_b := \frac{\pi}{2} \cdot (r_o^4 - r_i^4)$$

$$J_b = 8.5 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$J_{in} := \frac{\pi}{2} \cdot (r_{o\_in}^4 - r_{i\_in}^4)$$

$$J_{in} = 9.204 \times 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$p := \frac{J_b}{J_{in}}$$

$$p_2 := \frac{J_{in}}{J_b}$$

$$p = 92.352$$

$$p_2 = 0.011$$

$$q := \frac{G_b}{G_{in}}$$

$$q_2 := \frac{G_{in}}{G_b}$$

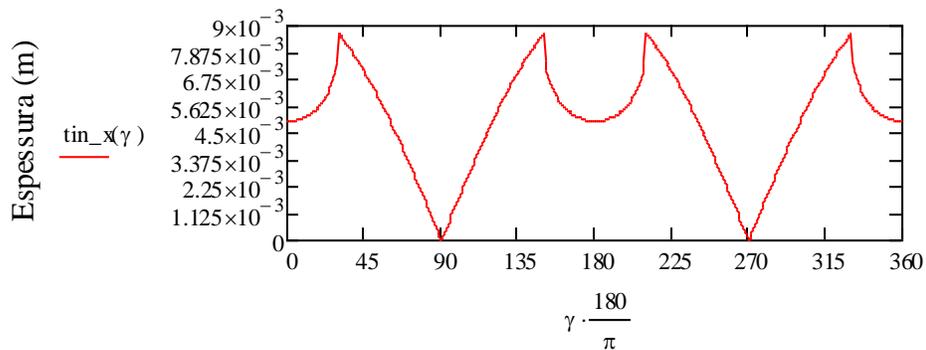
$$q = 0.185$$

$$q_2 = 5.419$$

$$t_{in} := \frac{1}{(1 + p \cdot q)} \cdot \frac{T \cdot r_{o\_in}}{J_{in}}$$

$$t_{in} = 1.098 \times 10^6 \text{ Pa}$$

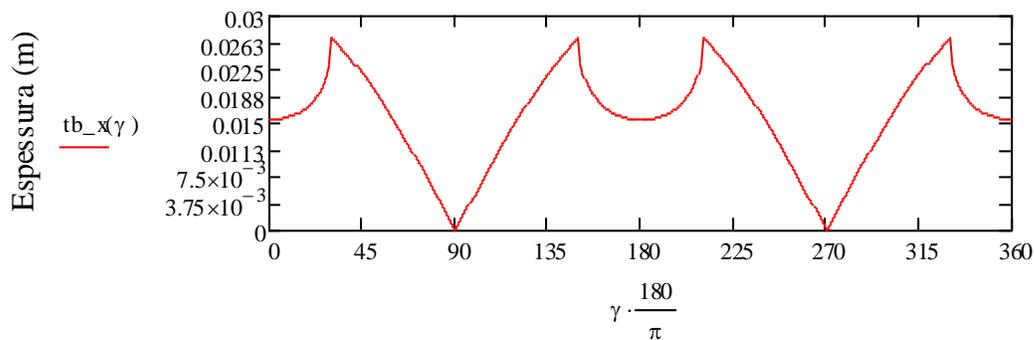
$$t_{in\_x}(\gamma) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{r_{o\_in}^2 - (y_c(\gamma))^2} & \text{if } r_{i\_in} < |y_c(\gamma)| \leq r_{o\_in} \\ 2 \left[ \sqrt{r_{o\_in}^2 - (y_c(\gamma))^2} - \sqrt{r_{i\_in}^2 - (y_c(\gamma))^2} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$



Ângulo (°)

$$t_b := \frac{1}{(1 + p_2 \cdot q_2)} \cdot \frac{T \cdot r_o}{J_b}$$

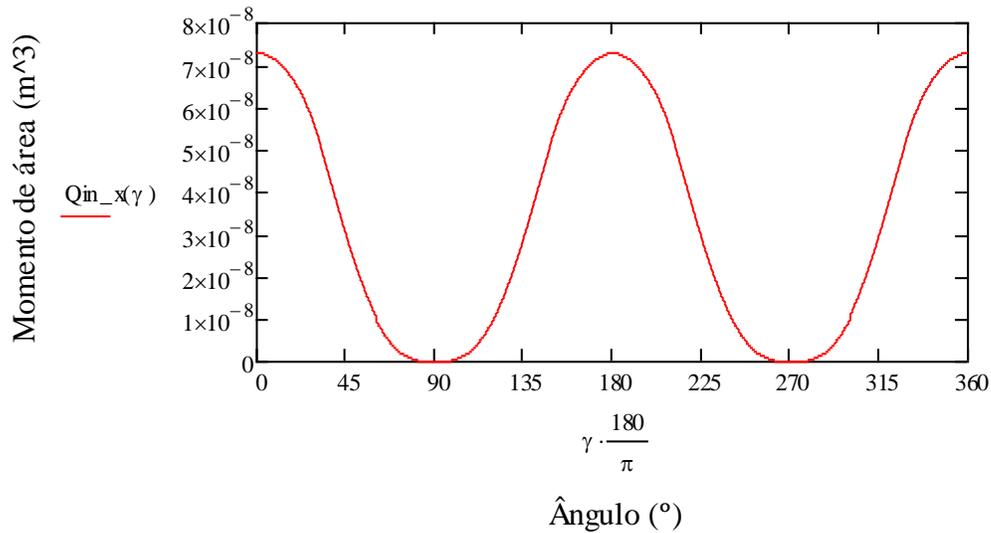
$$t_{b\_x}(\gamma) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{r_o^2 - (y_{c2}(\gamma))^2} & \text{if } r_i < |y_{c2}(\gamma)| \leq r_o \\ 2 \left[ \sqrt{r_o^2 - (y_{c2}(\gamma))^2} - \sqrt{r_i^2 - (y_{c2}(\gamma))^2} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$



Ângulo (°)

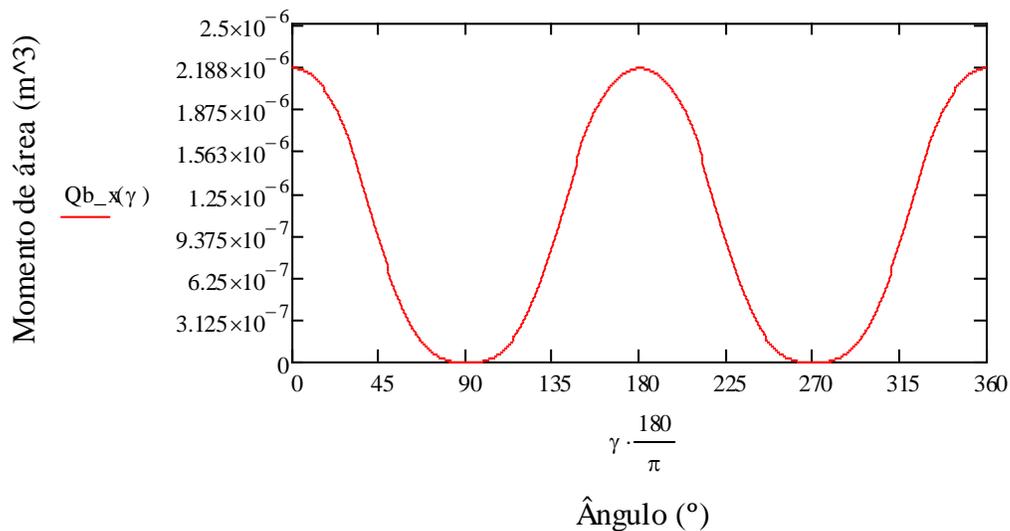
$$Q1(\gamma) := \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[ro\_in^2 - (yc(\gamma))^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)} \quad Q3(\gamma) := \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[ri\_in^2 - (yc(\gamma))^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$Qin\_x(\gamma) := \begin{cases} Q1(\gamma) & \text{if } ri\_in < |yc(\gamma)| \leq ro\_in \\ Q1(\gamma) - Q3(\gamma) & \text{otherwise} \end{cases}$$

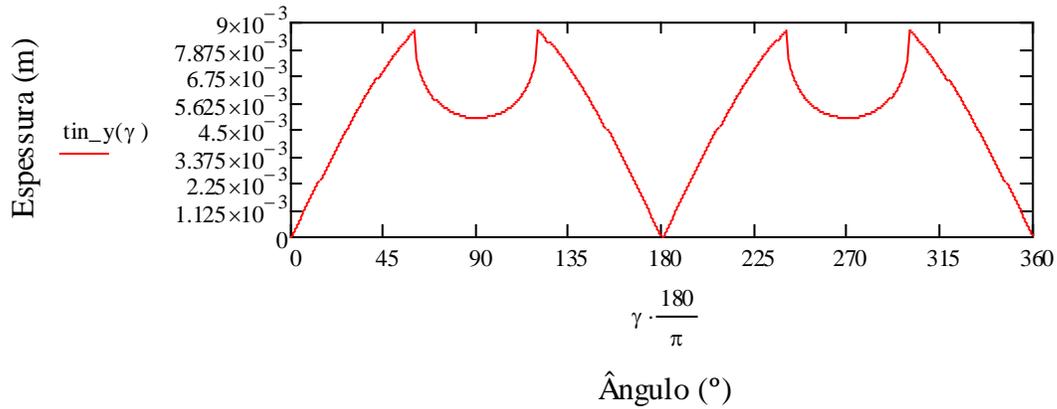


$$Q12(\gamma) := \frac{2}{3} \cdot \left[ro^2 - (yc2(\gamma))^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)} \quad Q32(\gamma) := \frac{2}{3} \cdot \left[ri^2 - (yc2(\gamma))^2\right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

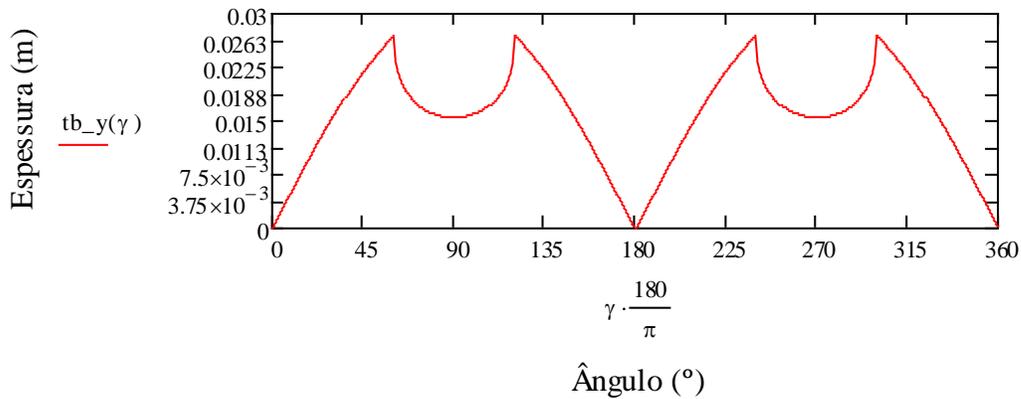
$$Qb\_x(\gamma) := \begin{cases} Q12(\gamma) & \text{if } ri < |yc2(\gamma)| \leq ro \\ Q12(\gamma) - Q32(\gamma) & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\underline{\underline{tin\_y}}(\gamma) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{ro\_in^2 - (xc\alpha(\gamma))^2} & \text{if } ri\_in < |xc\alpha(\gamma)| \leq ro\_in \\ 2 \left[ \sqrt{ro\_in^2 - (xc\alpha(\gamma))^2} - \sqrt{ri\_in^2 - (xc\alpha(\gamma))^2} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$



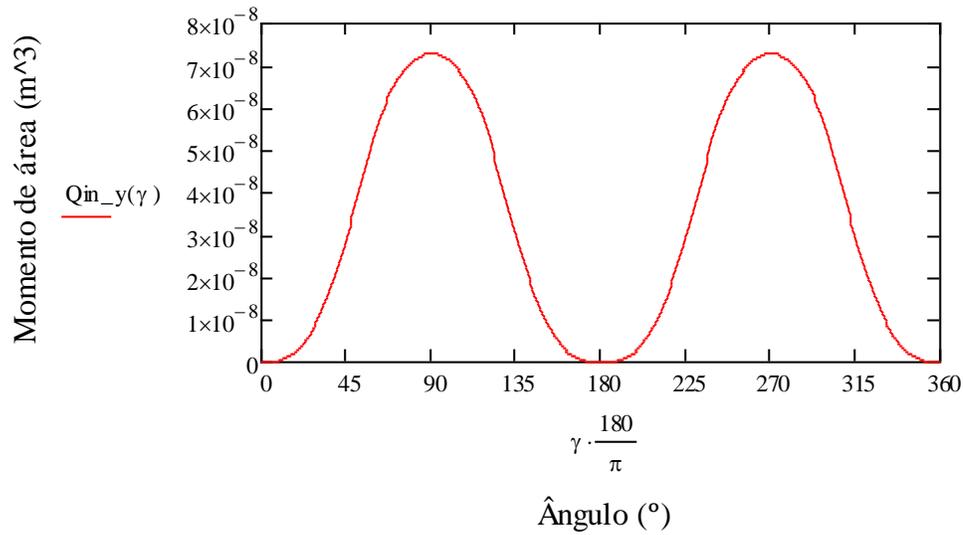
$$\underline{\underline{tb\_y}}(\gamma) := \begin{cases} 2 \cdot \sqrt{ro^2 - (xc\alpha(\gamma))^2} & \text{if } ri < |xc\alpha(\gamma)| \leq ro \\ 2 \left[ \sqrt{ro^2 - (xc\alpha(\gamma))^2} - \sqrt{ri^2 - (xc\alpha(\gamma))^2} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$\underline{\underline{Q1}}(\gamma) := \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[ ro\_in^2 - (xc\alpha(\gamma))^2 \right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\underline{\underline{Q3}}(\gamma) := \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[ ri\_in^2 - (xc\alpha(\gamma))^2 \right]^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

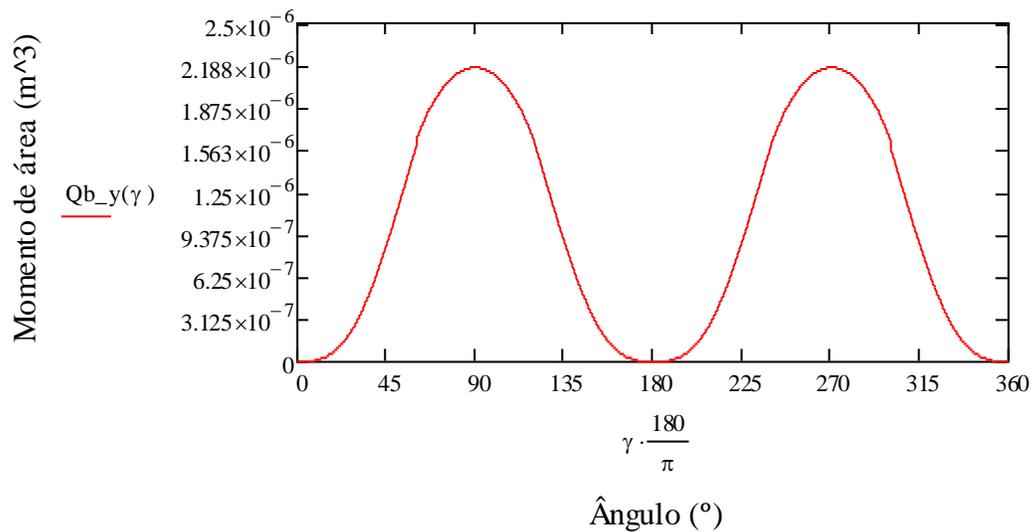
$$\underline{\underline{Qin\_y}}(\gamma) := \begin{cases} Q1(\gamma) & \text{if } ri\_in < |xc\alpha(\gamma)| \leq ro\_in \\ Q1(\gamma) - Q3(\gamma) & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$Q_{12}(\gamma) := \frac{2}{3} \cdot [ro^2 - (xc\alpha\gamma)]^2 \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$Q_{32}(\gamma) := \frac{2}{3} \cdot [ri^2 - (xc\alpha\gamma)]^2 \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$Q_{b\_y}(\gamma) := \begin{cases} Q_{12}(\gamma) & \text{if } ri < |xc\alpha\gamma| \leq ro \\ Q_{12}(\gamma) - Q_{32}(\gamma) & \text{otherwise} \end{cases}$$

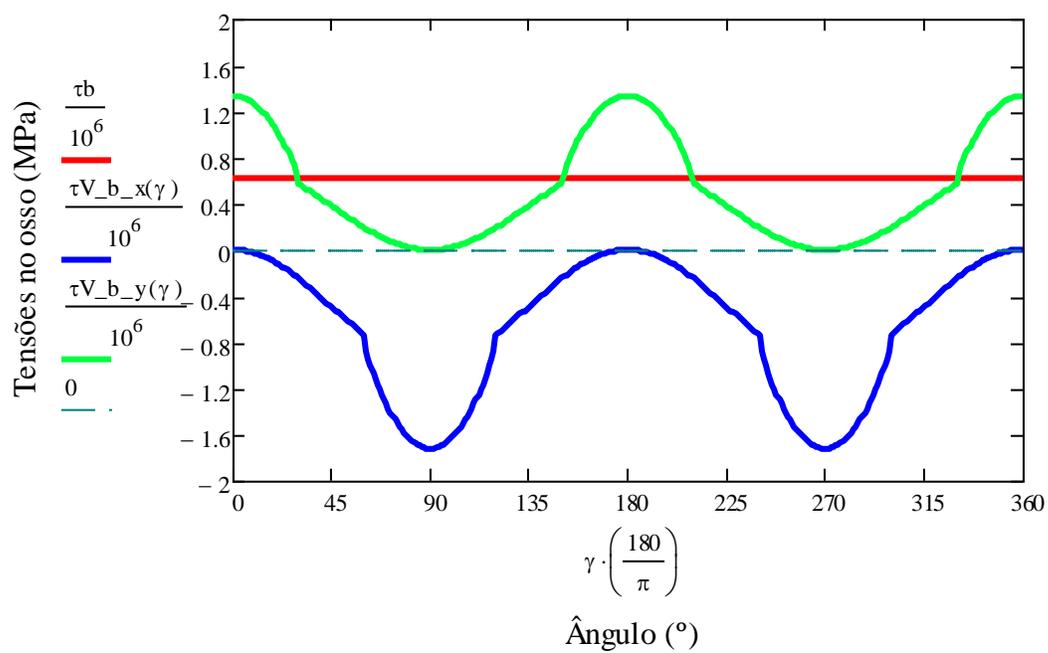
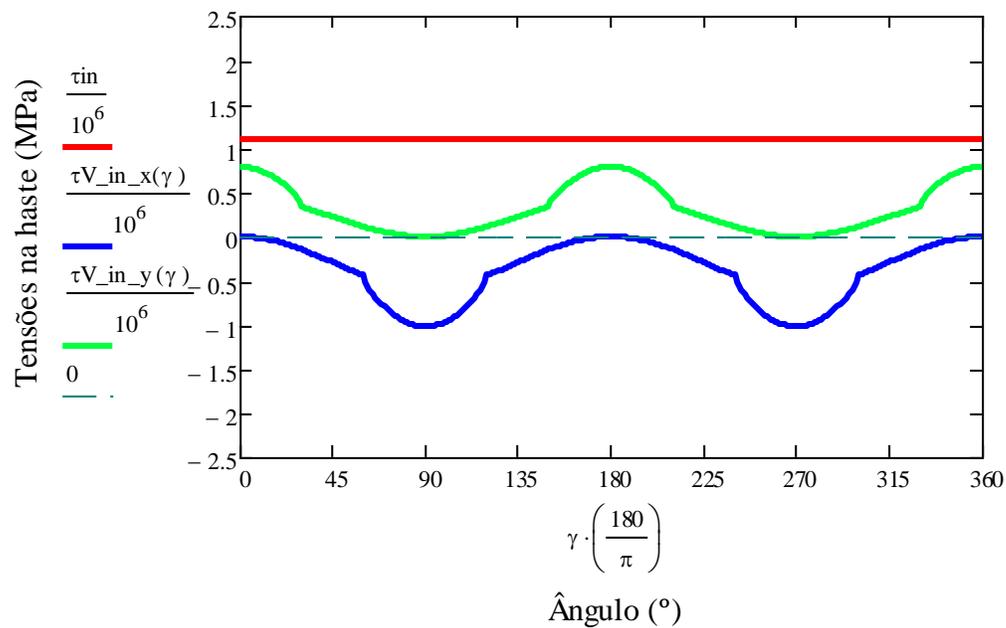


$$\tau V_{in\_x}(\gamma) := \frac{1}{1 + n1 \cdot sy} \cdot \left( \frac{Vx \cdot Q_{in\_y}(\gamma)}{I_{in\_y} \cdot tin\_y(\gamma)} \right)$$

$$\tau V_{in\_y}(\gamma) := \frac{1}{1 + n1 \cdot sx} \cdot \left( \frac{Vy \cdot Q_{in\_x}(\gamma)}{I_{in\_x} \cdot tin\_x(\gamma)} \right)$$

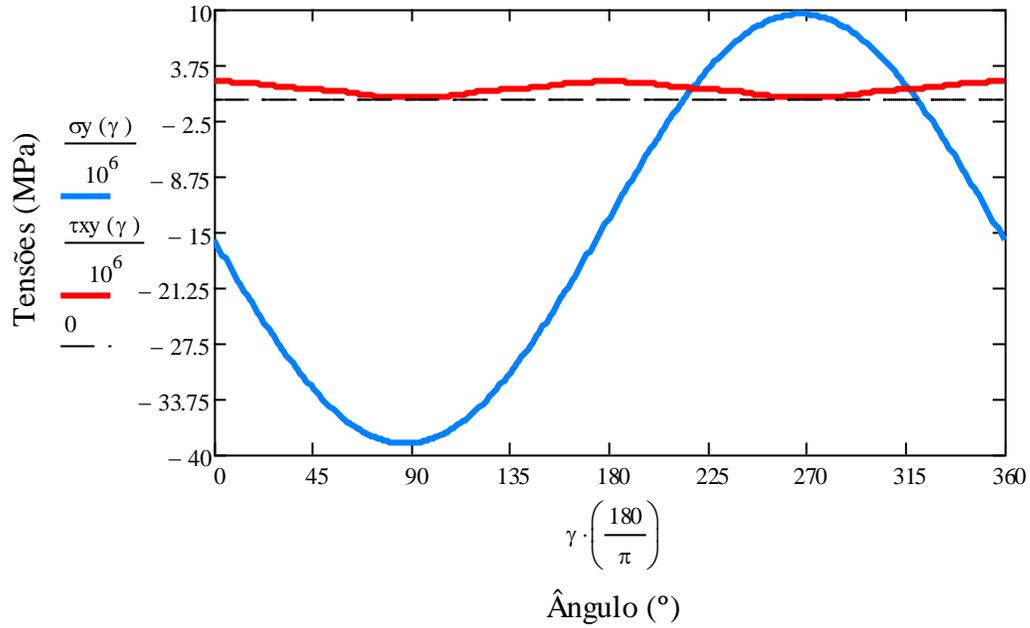
$$\tau_{V_{b_x}}(\gamma) := \frac{1}{1 + n_2 \cdot s_y^2} \cdot \left( \frac{V_x \cdot Q_{b_y}(\gamma)}{I_{b_y} \cdot t_{b_y}(\gamma)} \right)$$

$$\tau_{V_{b_y}}(\gamma) := \frac{1}{1 + n_2 \cdot s_x^2} \cdot \left( \frac{V_y \cdot Q_{b_x}(\gamma)}{I_{b_x} \cdot t_{b_x}(\gamma)} \right)$$



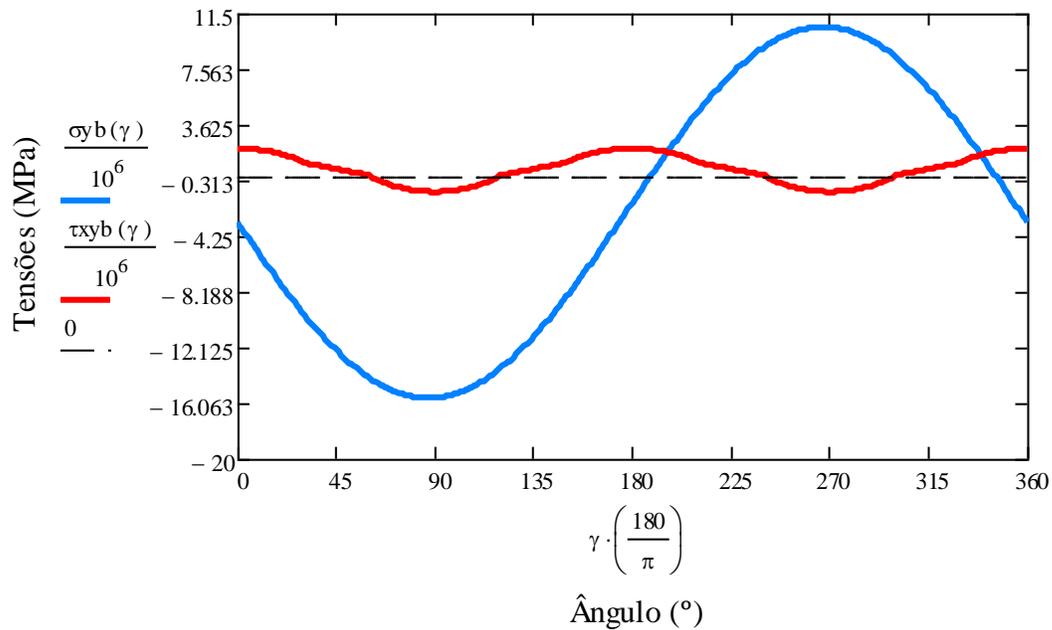
$$\underline{\underline{\sigma}}_y(\gamma) := \sigma_{N\_in} + \sigma_{B\_in\_x}(\gamma) + \sigma_{B\_in\_y}(\gamma)$$

$$\underline{\underline{\tau}}_{xy}(\gamma) := \tau_{in} + \tau_{V\_in\_x}(\gamma) + \tau_{V\_in\_y}(\gamma)$$

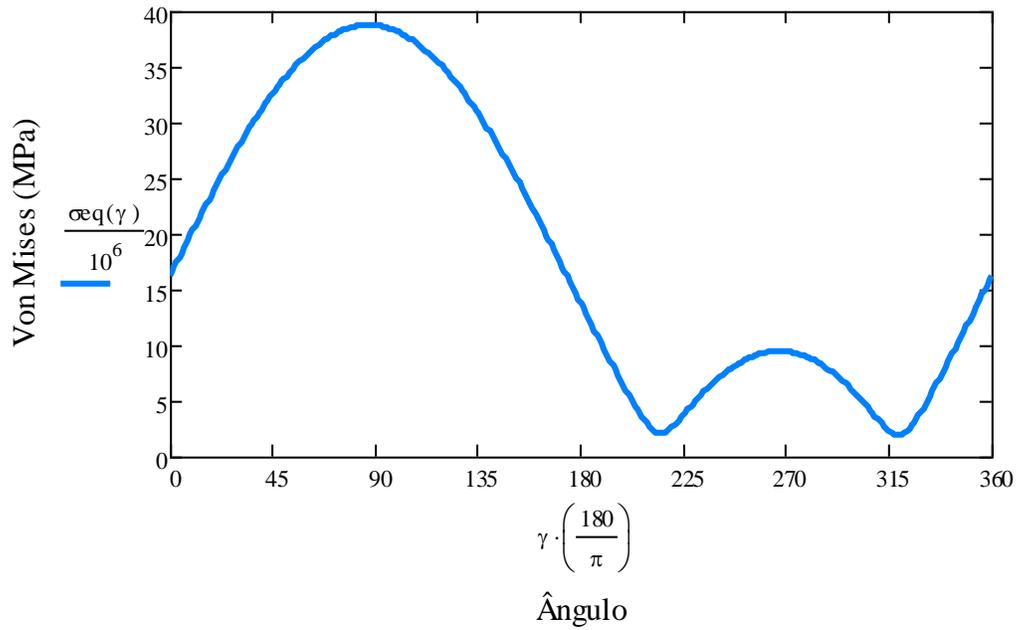


$$\underline{\underline{\sigma}}_b(\gamma) := \sigma_{N\_b} + \sigma_{B\_b\_x}(\gamma) + \sigma_{B\_b\_y}(\gamma)$$

$$\underline{\underline{\tau}}_{xyb}(\gamma) := \tau_b + \tau_{V\_b\_x}(\gamma) + \tau_{V\_b\_y}(\gamma)$$

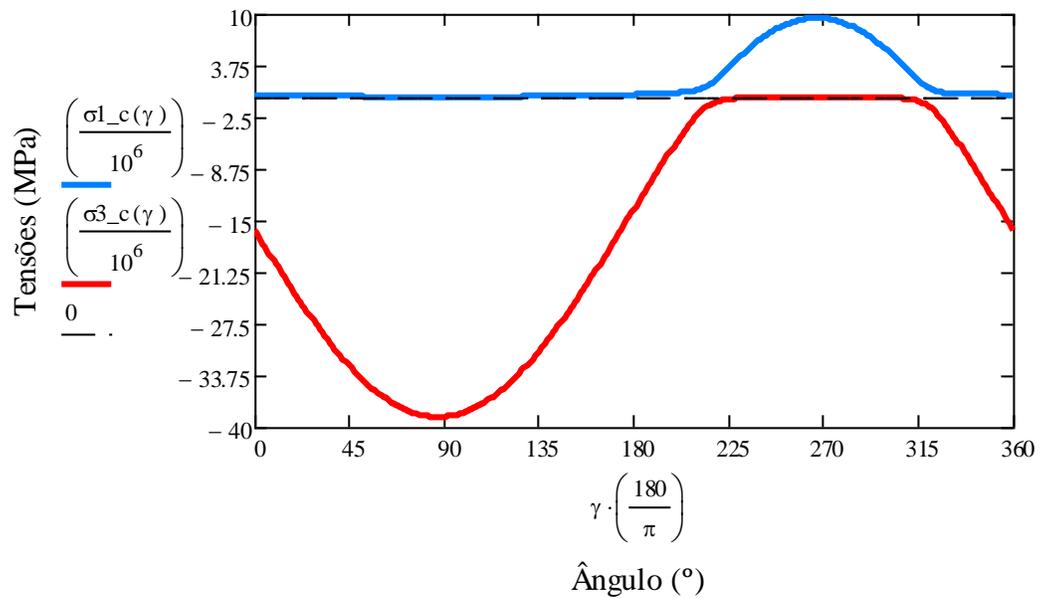


$$\underline{\underline{\sigma_{eq}(\gamma)}} := \sqrt{(\sigma_y(\gamma))^2 + 3 \cdot (\tau_{xy}(\gamma))^2}$$



$$\underline{\underline{\sigma_{1_c}(\gamma)}} := \frac{\sigma_y(\gamma)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y(\gamma)}{2}\right)^2 + (\tau_{xy}(\gamma))^2}$$

$$\underline{\underline{\sigma_{3_c}(\gamma)}} := \frac{\sigma_y(\gamma)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_y(\gamma)}{2}\right)^2 + (\tau_{xy}(\gamma))^2}$$



$$\underline{\underline{\sigma_{1b\_c}(\gamma)}} := \frac{\sigma_{yb}(\gamma)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{yb}(\gamma)}{2}\right)^2 + (\tau_{xyb}(\gamma))^2}$$

$$\underline{\underline{\sigma_{3b\_c}(\gamma)}} := \frac{\sigma_{yb}(\gamma)}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{yb}(\gamma)}{2}\right)^2 + (\tau_{xyb}(\gamma))^2}$$

